Satakunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 6.–10.3.2023
Ratkaisuja

1. Laske 1,0 L − 2 dl.

a) 8 dl **b)** 18 dl **c)** 2 L **d)** 1,2 L **e)** 8 L

Ratkaisu. a) 8 dl: Suoraan laskemalla saadaan

$$1{,}0 \text{ L} - 2 \text{ dl} = 10 \text{ dl} - 2 \text{ dl} = 8 \text{ dl}.$$

2. Tässä on kolmen suomalaisen kirjailijan elinajat: Minna Canth: 1844-1897, Aleksis Kivi: 1834-1872, Sakari Topelius: 1818-1898. Järjestä kirjailijat oikeaan järjestykseen lyhyimpään eläneestä pisimpään eläneeseen.

a) Canth, Kivi, Topelius **b)** Kivi, Canth, Topelius **c)** Topelius, Kivi, Canth
d) Topelius, Canth, Kivi **e)** Kivi, Topelius, Canth

Ratkaisu. b) Kivi, Canth, Topelius: Sakari Topelius syntyi ennen kuin Minna Canth tai Aleksis Kivi, mutta kuoli vasta näiden jälkeen. Hän eli siis pisimpään. Minna Canth taas syntyi kymmenen vuotta Aleksis Kiveä myöhemmin, mutta kuoli 25 vuotta myöhemmin, joten hän eli vanhemmaksi kuin Aleksis Kivi.

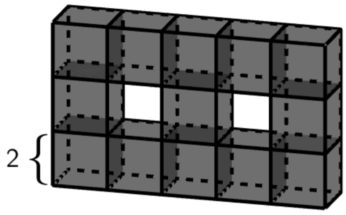
3. Kun elokuvateatterissa on sata ihmistä katsomassa erästä elokuvaa, elokuva kestää 2 h 10 min. Kuinka kauan elokuva kestää, kun sitä on katsomassa 50 katsojaa?

a) 1 h 5 min **b)** 1 h 10 min **c)** 2 h 5 min **d)** 2 h 10 min **e)** 4 h 20 min

Ratkaisu. d) 2 h 10 min: Elokuva kestää saman aikaa riippumatta siitä, kuinka monta katsojaa sillä on. Siis oikea vastaus on 2 h 10 min.

4. Kuvassa oleva kappale koostuu tummista kuutioista, joiden särmän pituus on 2. Mikä on kappaleen tilavuus?

a) 26 **b)** 30 **c)** 52 **d)** 104 **e)** 120



Ratkaisu. d) 104: Yhden kuution tilavuus on $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Kuutioita on 13, joten kappaleen tilavuus on $13 \cdot 8 = 104$.

5. Leolla on taskussaan kolikoita: osa niistä on 5 snt ja loput 20 snt. Mikä seuraavista **ei** voi olla hänen taskussaan olevien kolikoiden yhteenlaskettu arvo?

a) 25 snt **b)** 40 snt **c)** 90 snt **d)** 105 snt **e)** 112 snt

Ratkaisu. e) 112 snt: Kumpikin rahamäärä on jaollinen viidellä, joten myös kolikoiden yhteenlasketun arvon täytyy olla jaollinen viidellä. Luku 112 ei ole jaollinen viidellä; sen jakojäännös viidellä jaettaessa on kaksi. Siis 112 snt ei voi saada rahojen yhteenlasketuksi arvoksi. Huomataan myös, että kaikki muut rahamäärät voidaan saada esimerkiksi seuraavalla tavalla

$$25 \text{ snt} = 20 \text{ snt} + 5 \text{ snt}, \quad 40 \text{ snt} = 20 \text{ snt} + 4 \cdot 5 \text{ snt}, \quad 90 \text{ snt} = 4 \cdot 20 \text{ snt} + 2 \cdot 5 \text{ snt},$$
$$105 \text{ snt} = 5 \cdot 20 \text{ snt} + 5 \text{ snt}.$$

6. Heitetään kolikkoa. Kuinka monta kertaa sitä pitää heittää, jotta jompi kumpi kolikon puolista (kruuna tai klaava) tulee varmasti vähintään kahdesti?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Ratkaisu. b) 3: Joka heitolla tulee joko kruuna tai klaava. Jos siis kahdella heitolla ei ole vielä saatu samaa puolta, niin kolmannella heitolla täytyy tulla jompi kumpi edellisistä. Näin ollen oikea vastaus on kolme.

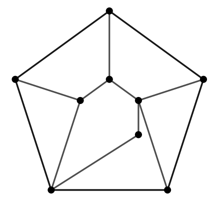
7. Laske $10\,\% - 1{,}3 + 4 \cdot \frac{5}{6}$.

a) $-\frac{26}{3}$ **b)** $\frac{3}{10}$ **c)** $\frac{32}{15}$ **d)** $\frac{91}{30}$ **e)** Ei voi laskea.

Ratkaisu. c) $\frac{32}{15}$: Suoraan laskemalla saadaan

$$10\,\% - 1{,}3 + 4 \cdot \frac{5}{6} = 0{,}1 - 1{,}3 + \frac{20}{6} = -1{,}2 + \frac{20}{6} = -\frac{12}{10} + \frac{20}{6} = -\frac{36}{30} + \frac{100}{30} = \frac{64}{30} = \frac{32}{15}.$$

8. Mitä seuraavista monikulmioista on eniten alla olevassa kuviossa? Laske mukaan vain sellaiset monikulmiot, joiden sivut on piirretty kuvaan ja joiden sisällä ei ole kuvaan merkittyjä janoja.



a) Kolmioita **b)** Nelikulmioita **c)** Viisikulmioita
d) Kaikkia edellisiä on yhtä paljon.
e) Ei mikään edellisistä

Ratkaisu. b) Nelikulmioita: Kuviossa on kaksi kolmiota, kolme nelikulmiota ja yksi viisikulmio (ympäröivää viisikulmiota ei lasketa mukaan). Siis nelikulmioita on eniten.

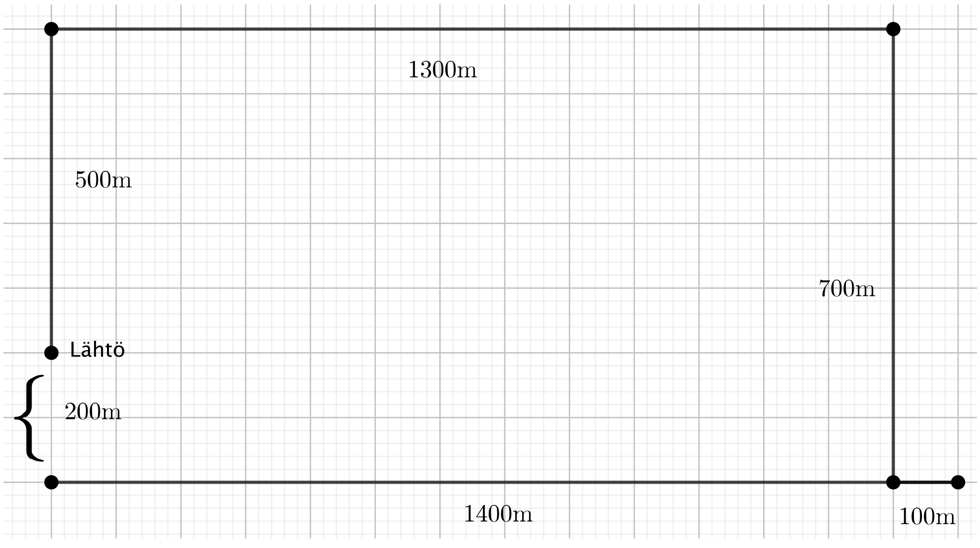
9. Aino lähtee juoksulenkille. Hän juoksee ensin 500 m pohjoiseen. Sitten hän kääntyy 90° oikealle ja juoksee 1300 m. Tämän jälkeen hän kääntyy jälleen 90° oikealle ja juoksee 700 m. Sitten hän kääntyy 90° vasemmalle ja juoksee 100 m. Seuraavaksi hän tekee 180° asteen käännökseen vasemmalle ja juoksee 1400 m.

Kuinka kaukana Aino on lähtöpisteestä?

a) 0 m **b)** 200 m **c)** 400 m **d)** 1800 m **e)** 5000 m

Ratkaisu. b) 200 m:

Tapa 1: Piirretään havainnollistava kuva Ainon juoksulenkistä ja lasketaan sen avulla, kuinka kaukana Aino on lähtöpisteestä. Ajatellaan, että pohjoinen on kuvassa ylöspäin ja että kuvassa yksi isomman neliön sivun pituus vastaan sataa metriä. Ensin siis kuljetaan viiden ruudun verran ylöspäin, sitten 13 ruutua oikealle ja niin edelleen. Saadaan alla oleva kuva.



Huomataan, että ollaan kaksi ruutua lähtöpisteen alla. Tämä tarkoittaa 200 metriä.

Tapa 2: Huomataan, että lähtöpisteestä kuljetaan oikealle ensin 1300 metriä ja myöhemmin $1400 - 100 = 1300$ metriä. Siis ollaan lähtöpisteen ylä- tai alapuolella tai lähtöpisteessä. Toisaalta on kuljettu 500 metriä pohjoiseen ja 700 metriä etelään. Siis etäisyys lähtöpisteeseen on $700 - 500 = 200$ metriä.

10. Jäätelökioskissa on valittavana kymmenen eri makua jäätelöä. Kuinka monta erilaista kahden pallon tötteröä, jossa pallot ovat eri makuja, voidaan ostaa?

Kaksi tötteröä ovat erilaiset, jos niissä on eri pallo päällimmäisenä tai alimmaisena. Erityisesti ne ovat erilaiset myös silloin, kun niissä on samat maut, mutta eri päin.

a) 45 **b)** 50 **c)** 55 **d)** 90 **e)** 100

Ratkaisu. d) 90**:** Ensimmäiselle maulle on kymmenen vaihtoehtoa ja koska seuraava ei saa olla samaa makua edellisen kanssa, on sille yhdeksän vaihtoehtoa. Siis sellaisia kahden pallon tötteröitä, jossa pallot ovat eri makua, on $10 \cdot 9 = 90$ kappaletta.

11. Kymmenen lasta hyppäsi pituutta. Kukin heistä hyppäsi yhden hypyn. Hyppyjen keskiarvo oli 2,85 m. Hetken päästä huomattiin, että osan lapsien hyppyjen pituudet oli mitattu 5 cm liian lyhyiksi. Tulokset korjattiin ja hyppyjen keskiarvoksi saatiin 2,87 m.

Kuinka monen lapsen tulos oli aluksi mitattu liian lyhyeksi?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Ratkaisu. e) 4**:**

Tapa 1: Huomataan, että $2{,}87\text{ m} - 2{,}85\text{ m} = 0{,}02$ m eli korjauksen jälkeen keskiarvo nousi 2 cm. Keskiarvo lasketaan jakamalla kaikkien tulosten summa lasten määrällä eli kymmenellä. Käydään kaikki vaihtoehdot läpi ja katstaan, mikä niistä tuottaa oikean tuloksen.

Selvästikään nollan lapsen tulos ei voinut parantua, sillä tällöin keskiarvo ei olisi muuttunut.

Jos yhden lapsen tulos olisi muuttunut, niin keskiarvo olisi parantunut $5\text{ cm}/10 = 0{,}5$ cm. Mutta tulos parantui kaksi senttimetriä, joten tämä ei ole mahdollista.

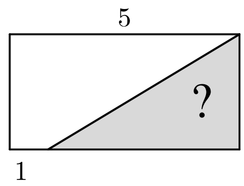
Jos kahden lapsen tulos olisi muuttunut, niin keskiarvo olisi parantunut $2 \cdot 5\text{ cm}/10 = 1$ cm. Mutta tulos parantui kaksi senttimetriä, joten tämä ei ole mahdollista.

Jos kolmen lapsen tulos olisi muuttunut, niin keskiarvo olisi parantunut $3 \cdot 5\text{ cm}/10 = 1{,}5$ cm. Mutta tulos parantui kaksi senttimetriä, joten tämä ei ole mahdollista.

Jos taas neljän lapsen tulos olisi muuttunut, niin keskiarvo olisi parantunut $2 \cdot 5\text{ cm}/10 = 2$ cm. Tämä on juuri haluttu muutos eli neljän lapsen tulos parani viidellä senttimetrillä. (Selvästikään yli viiden lapsen tulos ei ole voinut parantua, koska silloin tulos olisi parantunut yli kaksi senttimetriä.)

Tapa 2: Keskiarvo lasketaan jakamalla kaikkien tulosten summa lasten määrällä eli kymmenellä. Käydään kaikki vaihtoehdot läpi ja katstaan, mikä niistä tuottaa oikean tuloksen. Koska on $2{,}87\text{ m} - 2{,}85\text{ m} = 0{,}02$ m, niin korjauksen jälkeen keskiarvo nousi 2 cm eli pituushyppyjen tulosten summa nousi $10 \cdot 2\text{ cm} = 20$ cm. Koska on $20\text{ cm}/5\text{ cm} = 4$, niin neljän lapsen pituushyppytulos muuttui.

12. Suorakulmion leveys on 5 ja pinta-ala on 15. Sen vasemmassa reunassa olevan valkoisen puolisuunnikkaan alareunan leveys on 1. Mikä on tummennetun kolmion pinta-ala?



a) 4,5 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7,5 **e)** 9

Ratkaisu. c) 6**:** Suorakulmion korkeus on $15/5 = 3$, koska suorakulmion pinta-ala on kanta kertaa korkeus. Kolmion kanta on $5 - 1 = 4$, joten sen pinta-ala on $4 \cdot 3/2 = 6$.

13. Lukujonossa $3, 4, 2, 8, 6, \ldots$ kaksi ensimmäistä termiä ovat 3 ja 4. Tämän jälkeen seuraava termi on kahden edellisen termin tulon viimeinen numero. Esimerkiksi siis kolmas termi on 2, sillä pätee $3 \cdot 4 = 1\mathbf{2}$. Mikä on lukujonon 2023. termi?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8

Ratkaisu. e) 8: Koska $8 \cdot 6 = 48$, niin lukujonon kuudes termi on 8 ja samoin seitsemäs. Kahdeksas termi taas on 4, sillä $8 \cdot 8 = 64$ ja yhdeksäs termi on 2, sillä $8 \cdot 4 = 32$. Mutta nyt jonossa esiintyvät luvut 4 ja 2 tässä järjestyksessä uudelleen. Koska aina seuraava luku määräytyy edellisen kahden luvun mukaan, tämä tarkoittaa, että lukujonossa toistuu jakso $4, 2, 8, 6, 8, 8$ ensimmäisen luvun 3 jälkeen.

Tutkitaan, missä kohtaa jakso on 2023. termin kohdalla. Jakso alkaa termistä kaksi. Siis aina, kun jakojäännös kuudella jaettaessa on 2, kyseessä on termi 4, kun kolme, niin kyseessä on 2, viisi, niin termi on 6 ja muissa tapauksissa 8. Koska $2023 = 337 \cdot 6 + 1$, niin lukujonon 2023. termi on 8.

14. Laatikossa on 10 punaista, 20 keltaista ja 10 sinistä palloa. Anna ottaa niistä kymmenen ja tämän jälkeen Elmeri ottaa jäljellä olevista palloista kymmenen. Anna ja Elmeri katselevat kummankin pallokasoja ja huomaavat, että **vain yksi** seuraavista väittämistä on totta. Mikä?

a) Annalla ja Elmerillä on yhtä monta keltaista palloa.
b) Annalla on enemmän sinisiä palloja kuin Elmerillä.
c) Yhtään keltaista palloa ei jäänyt laatikkoon.
d) Annalla ja Elmerillä on yhteensä yli puolet palloista.
e) Annalla on vähemmän punaisia ja keltaisia palloja yhteensä kuin Elmerillä.

Ratkaisu. a) Annalla ja Elmerillä on yhtä monta keltaista palloa.: Väite ”Annalla ja Elmerillä on yhteensä yli puolet palloista” ei voi olla totta. Heillähän on $10 + 10 = 20$ palloa, mikä on puolet $10 + 20 + 10 = 40$ pallosta.

Koska Anna ja Elmeri nostavat yhtä monta palloa, niin väite ”Annalla on enemmän sinisiä palloja kuin Elmerillä.” tarkoittaa, että myös väite ”Annalla on vähemmän punaisia ja keltaisia palloja yhteensä kuin Elmerillä.” on totta ja sama toisin päin. Siis kumpikaan näistä väitteistä ei voi olla totta.

Lisäksi väite ”Yhtään keltaista palloa ei jäänyt laatikkoon.” tarkoittaa, että sekä Annalla että Elmerillä on kymmenen keltaista palloa. Mutta tämä tarkoittaisi, että myös väite ”Annalla ja Elmerillä on yhtä monta keltaista palloa.” olisi totta, mikä ei ole mahdollista, sillä tasan yhden väitteen halutaan olevan totta.

Näin ollen vain väite ”Annalla ja Elmerillä on yhtä monta keltaista palloa.” voi olla totta, kun täsmälleen yksi väitteistä on totta. Huomataan myös, että vain se pystyy olemaan totta: Tämä on voimassa esimerkiksi, kun Annalla on 4 punaista 4 keltaista ja 2 sinistä palloa sekä Elmerillä 2 punaista 4 keltaista ja 4 sinistä palloa.

15. Olkoon $J = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$. Kuinka suuri luku J on?

a) $0 \leq J < 2$ **b)** $2 \leq J < 4$ **c)** $4 \leq J < 6$ **d)** $6 \leq J < 8$ **e)** $8 \leq J < 10$

Ratkaisu. b) $2 \leq J < 4$: Etsitään ensin luvulle J alaraja. Huomataan, että on

$$J > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12} > 2.$$

Siis a-vaihtoehto ei ainakaan voi olla totta.

Etsitään nyt luvulle J yläraja. On ensinnäkin $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Lisäksi kaikki ne luvut $\frac{1}{k}$, jossa $k \geq 3$ on kokonaisluku, ovat korkeintaan luvun $\frac{1}{3}$ kokoisia. Täten J on

$$J \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{7}{3} = \frac{9}{6} + \frac{14}{6} = \frac{23}{6} < 4.$$

(Tai voitaisiin myös edellisessä kappaleessa olevien laskujen avulla päätellä, että on $J \leq 25/12 + 5/5 = 37/12 < 4$.) Ainoa sopiva vaihtoehto on siis b.