Turun alueen 7.-8.-luokkalaisten matematiikkakilpailu
Finaali 14.5.2022

Tehtävä 1

A) Laske $14 \cdot 5 + 2022$

B) Laita seuraavat murtoluvut suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan.

$$\frac{101}{203}, \quad \frac{202}{405}, \quad \frac{303}{607}, \quad \frac{404}{809}.$$

Ratkaisu. A-kohdassa $14 \cdot 5 = 70$ joten vastaukseksi tulee 2092.

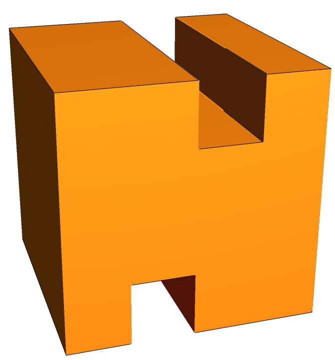
B-kohdassa toteamme, että positiivisten lukujen järjestys muuttuu päinvastaiseksi kun korvaamme ne käänteisluvuillaan. Annettujen lukujen käänteisluvut ovat

$$\frac{203}{101} = 2 + \frac{1}{101}, \ \frac{405}{202} = 2 + \frac{1}{202}, \ \frac{607}{303} = 2 + \frac{1}{303}, \ \frac{809}{404} = 2 + \frac{1}{404}$$

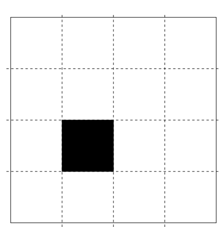
kaikki lähellä kakkosta. Lisätermit $(1/101, 1/202, \ldots)$ pienenevät nimittäjän kasvaessa, joten käänteisluvut ovat järjestyksessä suurimmasta pienimpään. Näin ollen alkuperäiset luvut ovat valmiiksi järjestyksessä pienimmästä suurimpaan.

Tehtävä 2

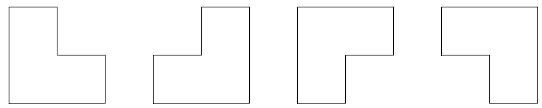
A) Kuution muotoisesta puupalasta, särmän pituus 4, sahataan ylä- ja alapinnalta pois särmän suuntainen osa, joka jonka poikkileikkaus on 1×1 neliö. Jäljelle jää kuvan mukainen kappale. Laske sen pinta-ala.



B) Oheisesta 4×4 ruudukosta on poistettu kuvan mukaisesti musta ruutu, jolloin jäljelle jää 15 valkoista ruutua. Peitä nämä 15 ruutua viidellä trominolaatalla. Trominolaatta on L-



kirjainta muistuttava kolmen ruudun kokoinen laatta. Kunkin trominolaatan voi asettaa minne tahansa ruudukkoon, missä tahansa alla olevan kuvan mukaisessa neljässä asennossa.

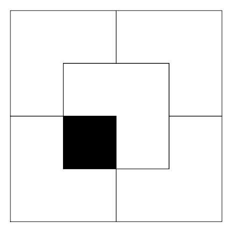


Ratkaisu. Leikkaamattoman kuution pinta-ala oli $6a^2 = 6 \cdot 4^2 = 96$ yksikköä. Palasten sahaaminen korvasi ylätahkolta (vastaavasti alatahkolta) yhden 1×4 suikaleen kolmella samanlaisella suikaleella. Tässä mielessä kumpikin poisto loi uutta pintaa $(3-1) \cdot 4 \cdot 1 = 8$ yksikköä. Lisäksi kumpikin sahaus poisti etu- ja takatahkoilta pinta-alaa yhden yksikön. Kuvan kappaleen pinta-ala on siis

$$A = 96 + 8 + 8 - 2 - 2 = 108 \text{ yksikköä.}$$

Samaan lopputulokseen päätyy myös monella muulla tavalla.

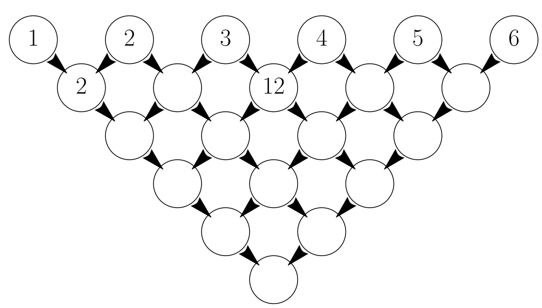
Pienen kokeilun perusteella nähdään, että trominot on pakko asettaa oheisen kuvan mukaisesti. Sijoittelu voi olla helpointa aloittaa vasemmasta alanurkasta, ja muiden laattojen asennot määräytyvät melko suoraviivaisesti.



Tehtävä 3 Alla olevassa kuviossa ylhäällä olevaan kuuteen ympyrään on kirjoitettu luvut $1, 2, 3, 4, 5$ ja 6. Tämän jälkeen aina kahden ympyrän välissä alapuolella olevaan ruutuun lasketaan kahdessa ylemmässä ympyrässä olevien lukujen tulo. Näistä kahdesta yläpuolella olevasta ympyrästä on selvyyden vuoksi piirretty nuoli alapuolella olevaan ympyrään. Esimerkiksi toisella rivillä vasemmassa reunassa olevaan ympyrään tulee luku 2, sillä on $1 \cdot 2 = 2$. Vastaavasti vasemmalta lukien kolmanteen ympyrään toisella rivilla tulee luku $3 \cdot 4 = 12$.

Kun näin jatketaan, kuinka monta nollaa on kuvion alimmaiseen ympyrään muodostuvan luvun lopussa?

(Esimerkiksi luvun 300 lopussa on kaksi nollaa ja luvun 1020 lopussa yksi nolla. Luvun 1008 lopussa ei ole yhtään nollaa.)



Ratkaisu. Kahdeksasluokkalaisten versiossa ylimmällä rivillä olivat luvut $2, 3, 4, 5, 6$ ja 7.

Seuraava havainto helpottaa tehtävää. Jos luvun a lopussa on n nollaa ja sen viimeinen nollasta eroava numero on c, ja vastaavasti luvun b lopussa on m nollaa ja sen viimeinen nollasta eroava numero on d, niin niiden tulon ab lopussa on ilmeiset $n+m$ nollaa sekä mahdollisesti tulon cd lopussa oleva nolla. Tässä c ja d ova välillä $1 \ldots 9$, joten kertotaulusta huomaamme, että uusi loppunolla muodostuu vain jos toinen luvuista

c ja d on 5 ja toinen parillinen. Jos näin ei ole, niin tulon ab viimeinen nollasta eroava numero on sama kuin tulon cd viimeinen numero.

Osoittautuu, että kolmiota täytettäessä ainoa tilanne, missä 5 esiintyy numerona c tai d on ensimmäisellä rivillä. Tämä tulee ilmi, kun pidämme kunkin uuden luvun kohdalla loppunollien lisäksi kirjaa viimeisestä nollasta eroavasta numerosta. Kutsumme näitä *lukujen oleellisiksi osiksi*. Seitsemäsluokkalaisten versiossa näin ajatellen riittää, kun huomaamme, että

- Toiselle riville muodostuvien lukujen oleelliset osat ovat $2, 6, 2, 20$ ja 30.
- Näin ollen kolmannelle riville muodostuvien lukujen oleelliset osat ovat $2, 2, 40, 600$.
- Neljännen rivin lukujen oleelliset osat ovat siis $4, 80, 4000$. Esimerkiksi viimeinen luku saatiin ottamalla edellisen rivin lukujen oleellisten osien tulosta $40 \cdot 600 = 24000$ sen oleellinen osa 4000.
- Viidennellä rivillä vastaavasti $20, 20000$.
- Alimmaisella rivillä siis 400000.

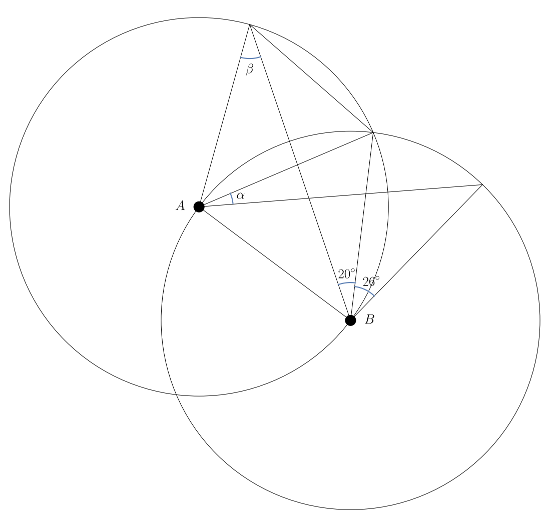
Vastaukseksi 7-luokkalaisten tehtävään siis tulee, että kyseisen luvun lopussa on viisi nollaa.

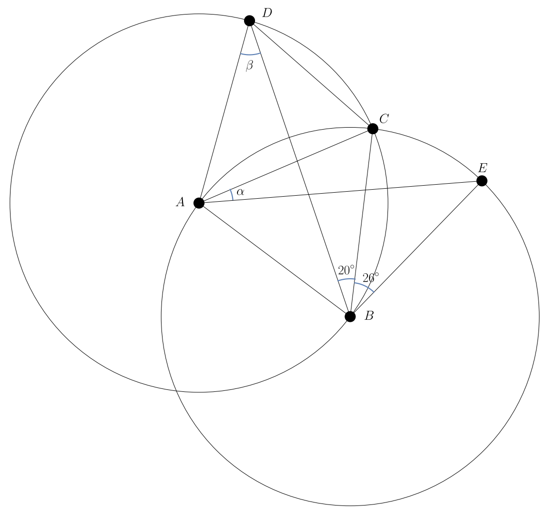
Kahdeksasluokkalaisten versiossa vastaavasti

- Toisen rivin lukujen oleelliset osat ovat $6, 2, 20, 30, 2$.
- Kolmannen rivin $2, 40, 600, 60$.
- Neljännen rivin $80, 4000, 6000$.
- Viidennellä rivillä oleelliset osat ovat 20000 ja 4000000.
- Alimman ympyrän luvun viimeinen nollasta eroava numero on siis 8 ja sitä seuraa $4 + 6 = 10$ nollaa.

Tehtävän voi ratkaista myös toisin, jos tuntee lukujen tekijöihinjakoja. Kussakin vaiheessa ratkaisevaa on, montako kertaa alkuluku 5 esiintyy tekijänä. Voi myös laskea tulot auki, mutta luvuista tulee aika isoja.

Tehtävä 4 Oheisessa kuvassa on kaksi ympyrää, joiden kummankin säde on pisteet A ja B yhdistävä jana. Kuvaan on merkitty kaksi kulmaa, suurudeltaan $20°$ ja $26°$. Määrää kulmien α ja β suuruudet. Huomautus: Kuva on tarkoituksella hieman epätarkka, joten älä käytä astelevyä. Muista perustella laskusi vaiheet.





Ratkaisu. Nimetään loputkin pisteet oheisen kuvan mukaisesti. Janat AB, BC ja CA ovat kaikki ympyröiden yhteisen säteen mittaisia, joten kolmio $\triangle ABC$ on tasasivuinen. Erityisesti sen kaikki kulmat ovat 60 asteen suuruisia.

Kulmien vähennyslaskulla saadaan

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$

Koska kolmio $\triangle ABD$ on tasakylkinen, niin myös kulma $\beta = \angle BDA = 40^\circ$. Kulmien yhteenlaskulla saadaan puolestaan

$$\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = 60^\circ + 26^\circ = 86^\circ.$$

Kolmio $\triangle ABE$ on sekin tasakylkinen, joten kulmat $\angle EAB$ ja $\angle AEB$ ovat yhtäsuuria. Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin

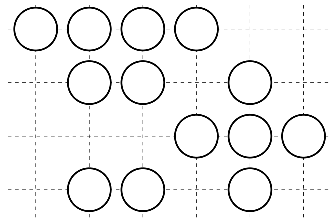
$$\angle EAB = \frac{180^\circ - \angle ABE}{2} = 47^\circ.$$

Näin ollen kulmien vähennyslaskulla

$$\alpha = \angle CAE = \angle CAB - \angle EAB = 13^\circ.$$

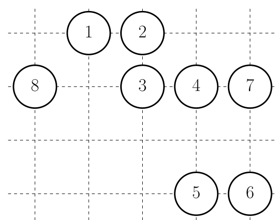
Tehtävä 5 Pelataan seuraavaa nappipeliä. Pelilaudalle on piirretty ruudukko, ja alkutilanteessa joihinkin risteyskohtiin on asetettu nappeja. Pelin tavoitteena on kerätä kaikki napit seuraavien sääntöjen mukaisesti.

1. Voit aloittaa minkä tahansa napin kohdalta, ja nostaa kyseisen napin laudalta.
2. Pelin muut askeleet muodostuvat seuraavasti. Valitset jonkin neljästä mahdollisesta suunnasta (vasemmalle, oikealle, ylös, alas). Siirryt sitten valitsemaasi suuntaan ruudukon lähimpään sellaiseen risteykseen, jossa on nappi. Poista tämä nappi.
3. Suunnan valinta on muuten vapaa, mutta edestakainen liike on kiellettyä. Jos siis edellinen siirto oli ylös, niin seuraava siirto voi olla ylös, vasemmalle tai oikealle, mutta ei alas. Jos edellinen siirto oli oikealle, niin seuraava ei voi olla vasemmalle jne.
4. Jos olet poistanut kaikki napit laudalta, niin olet ratkaissut tehtävän. Jos ajaudut tilanteeseen, jossa nappeja on vielä laudalla, mutta et kykene sääntöjen puitteissa siirtymään minkään laudalla vielä olevan napin kohdalle, yrityksesi epäonnistui.

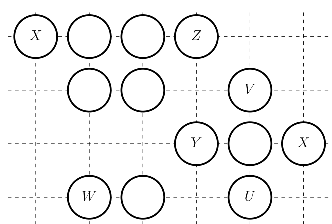


Tehtäväsi on kerätä laudalta kaikki napit, kun alkutilanne on alla olevan kuvan mukainen

Anna ratkaisusi kirjoittamalla kunkin napin päälle sen numero poimintajärjestyksessä. Alla on esimerkki helpomman alkutilanteen sääntöjen mukaisesta ratkaisusta. Huomaa, että kyseisessä ratkaisussa on sallittua siirtyä napista numero 7 vasemmalle liikuttaessa numeroon 8, koska niiden välissä olevat napit 3 ja 4 oli poistettu pelistä aikaisemmin. Voi olla hyvä idea kopioida alkutilanne ruutupaperille, jos joudut aloittamaan alusta useita kertoja. Tehtävässä ei tarvitse etsiä kaikkia ratkaisuja. Riittää, kun löydät yhden.

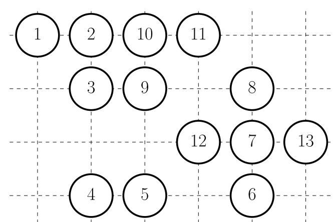


Ratkaisu. Koska edestakainen liike on kielletty säännöissä, ja kuvan X:llä merkityillä pisteillä on naapureita vain yhdessä suunnassa, ratkaisureitin on alettava niistä toisesta ja päätyttävä toiseen.



Edelleen, koska reitti ei siis ala/pääty kumpaakaan napeista Y tai Z, voimme päätellä, että niiden kahden napin välinen siirto (jompaan kumpaan suuntaan) on osa ratkaisureittiä. Koska nappi W ei ole päätepiste, jokin siirtymä yhdistää sen ylös ja jokin toinen siirtymä oikealle. Vastaava havainto voidaan tehdä nappien U ja V osalta. Tämän jälkeen vaihtoehtoja ei enää ole paljoa, ja pienellä kokeilulla löydämme yhden ratkaisun.

Toinen ratkaisu kulkee muilta osin edellisen ratkaisun reittiä päinvastaiseen suuntaan, mutta yllä olevan ratkaisun nappi numero 7 tulee silloin poimittavaksi toisena heti aloitusnapin 13 jälkeen.


1
2
10
11
3
9
8
12
7
13
4
5
6