Matematiktävling för elever i sjunde årskursen i Åbo 2.–6.3.2020
Lösningar

1. Beräkna $73{,}5 - 22{,}25$.

a) -149 **b)** $51{,}25$ **c)** $512{,}5$ **d)** 5125 **e)** $93{,}75$

Lösning. **b)** 51,25: Genom att räkna får vi $73{,}5 - 22{,}25 = 51{,}25$.

2. Vilket av följande tal är sjutton miljoner femhundratusen fyrtionio?

a) 1 750 049 **b)** 17 050 049 **c)** 17 500 049 **d)** 170 500 049 **e)** 175 000 049

Lösning. **c)** 17 500 049

3. En pizza är uppdelad i jämnstora bitar. Nina äter en sjättedel av bitarna, Verneri en fjärdedel och Maja hälften. En bit blir över. Hur många bitar bestod pizzan av?

a) 12 **b)** 13 **c)** 18 **d)** 24 **e)** 36.

Lösning. **a)** 12: Vi betecknar antalet bitar med x. Nu gäller

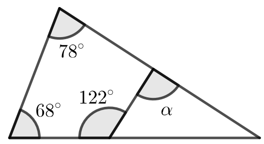
$$\frac{x}{6} + \frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 1 = x,$$

och då får vi svaret $x = 12$.

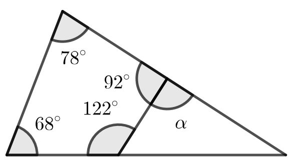
(Samma härledning kan göras även utan en ekvation. Vi märker att en bit motsvarar den delen av pizzan som blir över, då vi tar bort en sjättedel, en fjärdedel och hälften av pizzan, alltså en tolftedel. Pizzan består av 12 bitar)

4. Beräkna storleken av vinkeln α.

a) 66° **b)** 77° **c)** 88° **d)** 99° **e)** 111°



Lösning.



c) 88°: Då en fyrkants vinkelsumma alltid är 360°, är storleken av vinkelns α supplementvinkel

$$360° - 68° - 78° - 122° = 92°.$$

Alltså är $\alpha = 180° - 92° = 88°$.

5. Produkten av tio positiva heltal är 100. Vilket är det största talet som kan förekomma i produkten?

a) 0 **b)** 1 **c)** 1,59 **d)** 100
e) Det finns inte ett största tal som kan förekommer i produkten.

Lösning. d) 100: Det minsta positiva heltalet är 1. Därför är de nio minsta talen i produkten talen 1, och då är det största talet högst $\frac{100}{1^9} = 100$. 100 är även ett möjligt allternativ.

6. I en påse finns 12 gröna, 20 blåa och 13 röda kulor. Man lyfter kulor från påsen på måfå. Hur många kulor måste lyftas, så att vi med säkerhet lyfter minst två kulor av varje färg?

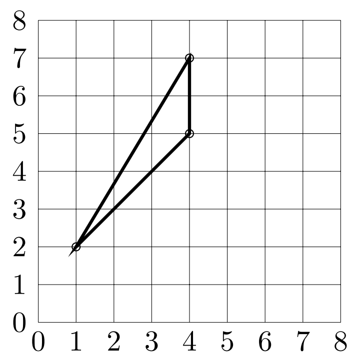
a) 6 **b)** 27 **c)** 34 **d)** 35 **e)** 45.

Lösning. d) 35: I värsta fall lyfter vi största möjliga antalet kulor av ändast två färger, i detta fall 20 blåa och 13 röda. Efter det måste man lyfta ännu två kulor som i det fallet är gröna. Alltså måste man lyfta $20 + 13 + 2 = 35$ kulor.

7. Spetspunkterna för en triangel är $(1, 2)$, $(4, 5)$ och $(4, 7)$. Vilket av följade påståenden stämmer?

a) Triangeln är liksidig.
b) Triangeln är likbent.
c) Triangeln är rätvinklig.
d) Triangeln är trubbvinklig.
e) Fler än ett av de föregående alternativen stämmer.

Lösning. d) Triangeln är trubbvinklig: På bilden ser vi att triangeln är trubbvinkig och att de andra alternativen inte stämmer.



8. Vi vet att det finns sammanlagt 13 bollar i den röda och den blåa korgen, 15 bollar sammanlagt i den blåa och den gula korgen samt 7 bollar sammanlagt i den gula och den röda korgen. Hur många bollar finns i den röda korgen?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** Situationen är omöjlig.
e) Uppgiften kan inte lösas med den givna informationen.

Lösning. d) Situationen är omöjlig: Om vi räknar ihop antalet bollar i den röda och den blåa korgen, blåa och gula korgen samt gula och röda korgen, får vi antalet bollar gånger två, som alltså är $13 + 15 + 7 = 35$. Resultatet borde vara ett jämnt tal då det är antalet bollar räknat två gånger. 35 är inte ett jämnt tal, alltså är situationen omöjlig.

9. I ett rätblock har vi n kanter med längden ett. Vilket av följande tal är ett möjligt värde för n?

a) 0 **b)** 4 **c)** 9 **d)** 11 **e)** Alla föregående.

Lösning. b) 4: I ett rätblock är alltid de fyra kanter som är riktade åt samma håll lika långa. Alltså måste talet n vara delbart med fyra; det ända möjliga alternativet är b) 4.

10. Vilket av följande tal är störst?

$$A = \frac{15}{31}, \quad B = \frac{16}{33}, \quad C = \frac{17}{35}, \quad D = \frac{18}{37}$$

a) A **b)** B **c)** C **d)** D **e)** Talen är lika stora.

Lösning. d) D: **Metod 1:** Talens inverterade tal är $1/A = 31/15 = 2 + \dfrac{1}{15}$, $1/B = 2 + \dfrac{1}{33}$, $1/C = 2 + \dfrac{1}{35}$ och $1/D = 2 + \dfrac{1}{37}$. Då ser vi att $1/D$ är det minsta av de inverterade talen, alltså är D störst av de originala talen.

Metod 2: Vi betraktar talen i decimalform genom att räkna de första decimalerna i talen. Vi får att

$$\frac{15}{31} \approx 0{,}4839, \quad \frac{16}{33} \approx 0{,}4848, \quad \frac{17}{35} \approx 0{,}4857 \quad \text{ja} \quad \frac{18}{37} \approx 0{,}4865.$$

11. I en klass är medeltalet för betygsvitsorden i ämnet matematik exakt 8,24. Vad är det minsta möjliga antalet elever i klassen?

a) 32 **b)** 24 **c)** 30 **d)** 25 **e)** 20.

Lösning. d) 25: Vi märker först att $8{,}24 = \frac{824}{100} = \frac{412}{50} = \frac{206}{25}$. Man räknar medeltalet genom att dela vitsordens summa med antalet elever. Om vitsordens summa är n och elevernas antal m är medeltalet alltså $\frac{n}{m}$. Talen m och n måste båda vara heltal. Då det inte går att förenkla bråket $\frac{206}{25}$, måste talet m vara minst 25.

12. Beräkna $\left|-\left(-\left(-\left(-\left(0 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\right)\right)\right)\right)\right|$.

a) -1 **b)** 0 **c)** 1 **d)** $-\frac{4}{3}$ **e)** $\frac{4}{3}$

Lösning. c) 1: Vi märker först att om man tillägger talet 0 påverkar det inte uttrycket, därför är vi ändast intresserade av uttrycket $-4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ (nollan kan lämnas bort). Att multiplicera med 1 ändrar inte på uttryckets värde, och i uttrycket finns tal och deras inverterade tal (vilka vid multiplikation ger 1). Därför har vi $-4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = -1$. Helt i slutet kommer vi alltså att ta absolutbeloppet av 1 eller -1, i båda fallen är svaret 1.

13. En matematiker har i sin bokhylla finsk-, svensk-, fransk- och engelskspråkiga böcker. Då han väljer en bok på måfå är den med $\frac{2}{5}$ sannolikhet svensk- eller finskspråkig, med $\frac{4}{5}$ sannolikhet svensk-, fransk- eller engelskspråkig samt med $\frac{1}{2}$ sannolikhet engelskspråkig. Vad är andelen franskspråkiga böcker av alla böcker?

a) $\frac{3}{10}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{10}$ **e)** $\frac{3}{20}$

Lösning. d) $\frac{1}{10}$: Då sannolikheten för att den valda boken är svensk-, fransk- eller engelskspråkig är $\frac{4}{5}$, är sannolikheten för att den är finskspråkig $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. Nu får vi att boken är svenskspråkig med sannolikheten $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$. Då boken är engelskspråkig med $\frac{1}{2}$ sannolikhet, är boken franskspråkig med sannolikheten

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 4 - 2 - 5}{10} = \frac{1}{10}.$$

Denna sannolikhet berättar även andelen franska böcker i bokhyllan.

14. Då a är ett positivt heltal betyder $a!$ produkten av talen 1, 2, ..., a. Till exempel är $1! = 1$ och $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Talen a och b är positiva heltal. Vilket av följande alternativ kan **inte** vara talets $a! + b!$ sista siffra?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 0

Lösning. d) 9: Vi kan räkna att

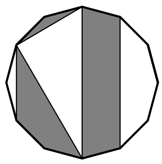
$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Om a är större än 5, är $a!$ med säkerhet delbart med talen 2 ja 5, och då är sista siffran 0. Alltså kan talens $a!$ och $b!$ sista siffra endast vara ett av följande alternativ: 0, 1, 2, 4 eller 6. Sista siffran i summan av sådana tal kan vara

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 0+2=2, \quad 0+4=4, \quad 0+6=6, \quad 1+1=2, \quad 1+2=3,$$
$$1+4=5, \quad 1+6=7, \quad 2+2=4, \quad 2+4=6, \quad 2+6=8, \quad \text{och} \quad 4+6=10.$$

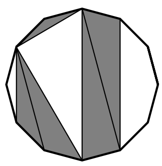
Därför kan sista siffran i talet $a! + b!$ vara 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 och 8. Den ända siffran som inte kan vara den sista siffran är 9.

15. Här är en regelbunden 12-hörning. Hela 12-hörningens area är 1. Vad är det skuggade områdets area?

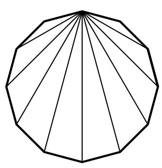


a) $\frac{7}{11}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{5}{12}$ **e)** $\frac{1}{2}$

Lösning. e) $\frac{1}{2}$: Vi kan dela in 12-hörningen i trianglar på följande vis:



å andra sidan kan vi dela in vår 12-hörning i trianglar såhär:



I båda figurerna ser vi fem olika trianglar, två stycken av alla sorter. I det skuggade området förekommer exakt en av varje triangeltyp. Därför är det skuggade områdets area exakt hälften av hela 12-hörningen, alltså 1/2.