Turun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 2.–6.3.2020
Ratkaisuja

1. Laske 73,5 − 22,25.

a) −149 **b)** 51,25 **c)** 512,5 **d)** 5125 **e)** 93,75

Ratkaisu. **b)** 51,25: Suoraan laskemalla saadaan 73,5 − 22,25 = 51,25.

2. Mikä seuraavista luvuista on seitsemäntoista miljoonaa viisisataatuhatta neljäkymmentäyhdeksän?

a) 1 750 049 **b)** 17 050 049 **c)** 17 500 049 **d)** 170 500 049 **e)** 175 000 049

Ratkaisu. **c)** 17 500 049

3. Pitsa on jaettu yhtä suuriin palasiin. Niina syö paloista kuudesosan, Verneri neljäsosan ja Maija puolet. Yksi pala jää yli. Moneenko osaan pitsa oli jaettu?

a) 12 **b)** 13 **c)** 18 **d)** 24 **e)** 36

Ratkaisu. **a)** 12: Merkitään palojen lukumäärää kirjaimella x. Tällöin pätee

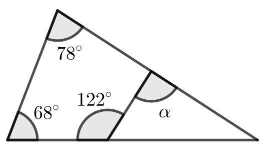
$$\frac{x}{6} + \frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 1 = x,$$

josta saadaan ratkaistua $x = 12$.

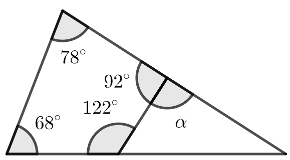
(Vastaavan päättelyn voi tehdä myös ilman yhtälöä vain suoraan havaitsemalla, että yksi pala vastaa sitä osuutta pitsasta, joka saadaan, kun ykkösestä vähennetään kuudeosa, neljäsosa ja puolet.)

4. Laske kulman α suuruus.

a) 66° **b)** 77° **c)** 88° **d)** 99° **e)** 111°



Ratkaisu.



c) 88°: Koska nelikulmion kulmien summa on 360°, niin kulman α vieruskulman suuruus on

$$360° - 68° - 78° - 122° = 92°.$$

Siis pätee $\alpha = 180° - 92° = 88°$.

5. Kymmenen positiivisen kokonaisluvun tulo on 100. Mikä on suurin luku, joka tulossa voi esiintyä?

a) 0 **b)** 1 **c)** 1,59 **d)** 100
e) Ei ole olemassa suurinta mahdollista tulossa olevaa lukua.

Ratkaisu. d) 100: Pienin positiivinen kokonaisluku on 1. Siis yhdeksän pienintä tulossa olevaa lukua ovat 1, joten isoin luku on korkeintaan $\frac{100}{1^9} = 100$. Tämä on myös selvästi mahdollista.

6. Pussissa on 12 vihreää, 20 sinistä ja 13 punaista kuulaa. Pussista nostetaan kuulia umpimähkään. Montako kuulaa on nostettava, jotta varmasti saadaan kaksi kuulaa jokaista väriä?

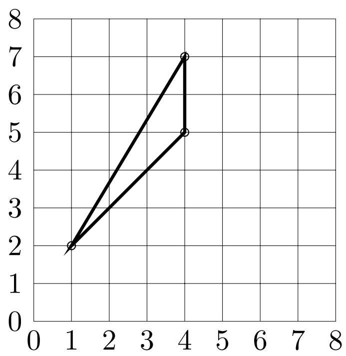
a) 6 **b)** 27 **c)** 34 **d)** 35 **e)** 45

Ratkaisu. d) 35: Pahimmassa tapauksessa nostetaan ensin suurin mahdollinen määrä vain kahden värisiä kuulia, tässä tapauksessa 20 sinistä ja 13 punaista. Tämän jälkeen on nostettava vielä kaksi vihreää kuulaa. Yhteensä on siis nostettava $20 + 13 + 2 = 35$ kuulaa.

7. Kolmion kärkipisteet ovat $(1, 2)$, $(4, 5)$ ja $(4, 7)$. Mikä seuraavista pitää paikkansa?

a) Kolmio on tasasivuinen.
b) Kolmio on tasakylkinen.
c) Kolmio on suorakulmainen.
d) Kolmio on tylppäkulmainen.
e) Useampi kuin yksi edellisistä vaihtoehdoista pätee.

Ratkaisu. d) Kolmio on tylppäkulmainen: Kuvasta nähdään, että kolmio on tylppäkulmainen eivätkä muut vaihtoehdot pidä paikkaansa.



8. Tiedetään, että punaisessa ja sinisessä korissa on yhteensä 13 palloa, sinisessä ja keltaisessa korissa yhteensä 15 palloa sekä keltaisessa ja punaisessa korissa yhteensä 7 palloa. Miten monta palloa on punaisessa korissa?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** Tilanne on mahdoton.
e) Tehtävä ei ole ratkaistavissa annetuilla tiedoilla.

Ratkaisu. d) Tilanne on mahdoton: Jos lasketaan yhteen punaisen ja sinisen, sinisen ja keltaisen sekä keltaisen ja punaisen korin pallojen määrät, saadaan kaksi kertaa kaikkien pallojen määrä, joka on siis $13 + 15 + 7 = 35$. Tuloksen pitäisi olla parillinen, koska on saatu kaksi kertaa pallojen yhteismäärä. Se ei kuitenkaan ole, joten tilanne on mahdoton.

9. Eräässä suorakulmaisessa särmiössä on täsmälleen n sivua, joiden pituus on yksi. Mikä seuraavista on luvulle n mahdollinen arvo?

a) 2 **b)** 4 **c)** 9 **d)** 11 **e)** Kaikki edelliset

Ratkaisu. b) 4: Suorakulmaisessa särmiössä särmät jakautuvat aina kolmeen neljän särmän joukkoon. Kussakin joukossa kaikki särmät ovat yhtä pitkät. Siispä luvun n on oltava neljällä jaollinen ja ainoa mahdollinen vaihtoehto on neljä.

10. Mikä seuraavista luvuista on suurin?

$$A = \frac{15}{31}, \quad B = \frac{16}{33}, \quad C = \frac{17}{35}, \quad D = \frac{18}{37}$$

a) A **b)** B **c)** C **d)** D **e)** Luvut ovat yhtä suuria.

Ratkaisu. d) D: **Tapa 1:** Lukujen käänteisluvut ovat $1/A = 31/15 = 2 + \frac{1}{15}$, $1/B = 2 + \frac{1}{33}$, $1/C = 2 + \frac{1}{35}$ ja $1/D = 2 + \frac{1}{37}$. Tästä nähdään, että $1/D$ on käänteisluvuista pienin, joten D on alkuperäisistä luvuista suurin.

Tapa 2: Tarkastellaan lukuja desimaalimuodossa laskemalla niiden muutamia ensimmäisiä desimaaleja. Saadaan

$$\frac{15}{31} \approx 0{,}4839, \quad \frac{16}{33} \approx 0{,}4848, \quad \frac{17}{35} \approx 0{,}4857 \quad \text{ja} \quad \frac{18}{37} \approx 0{,}4865.$$

11. Eräässä luokassa matematiikan todistusarvosanojen keskiarvo oli täsmälleen 8,24. Mikä oli pienin mahdollinen määrä oppilaita luokassa?

a) 32 **b)** 24 **c)** 30 **d)** 25 **e)** 20

Ratkaisu. d) 25: Huomataan aluksi, että $8{,}24 = \frac{824}{100} = \frac{412}{50} = \frac{206}{25}$. Keskiarvo lasketaan jakamalla arvosanojen summa oppilaiden määrällä. Jos arvosanojen summa on n ja oppilaiden määrä m, on keskiarvo siis $\frac{n}{m}$. Näiden on molempien oltava kokonaislukuja. Koska lukua $\frac{206}{25}$ ei voi sieventää, on luvun m pienin mahdollinen arvo 25.

12. Laske $\left|-\left(-\left(-\left(-\left(0 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\right)\right)\right)\right)\right|$.

a) -1 **b)** 0 **c)** 1 **d)** $-\frac{4}{3}$ **e)** $\frac{4}{3}$

Ratkaisu. c) 1: Havaitaan ensinnäkin, ettei nollan lisääminen muuta luvun arvoa, joten tämän takia vain lausekkeen sisällä olevasta lausekkeesta vain osuus $-4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ on kiinnostava. Huomataan, että ykkösellä kertominen ei muuta lausekkeen arvoa ja lisäksi lausekkeesta löytyy aina luku ja sen käänteisluku. Siis on $-4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = -1$. Siispä lopuksi otetaan joko luvusta 1 tai -1 itseisarvo. Molemmissa tapauksissa tulos on 1.

13. Matemaatikolla on kirjahyllyssään suomen-, ruotsin-, ranskan- ja englanninkielisiä kirjoja. Hän valitsee satunnaisesti yhden kirjan, ja se on $\frac{2}{5}$ todennäköisyydellä suomen- tai ruotsinkielinen, $\frac{4}{5}$ ruotsin-, ranskan- tai englanninkielinen sekä $\frac{1}{2}$ todennäköisyydellä englanninkielinen. Mikä on ranskankielisten kirjojen osuus kaikista kirjoista?

a) $\frac{3}{10}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{10}$ **e)** $\frac{3}{20}$

Ratkaisu. d) $\frac{1}{10}$: Koska todennäköisyys sille, että satunnaisesti valittu kirja ruotsin-, ranskan- tai englanninkielinen, on $\frac{4}{5}$, niin kirja on todennäköisyydellä $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ suomenkielinen. Täten todennäköisyys kirjan ruotsinkielisyydelle on $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$. Koska kirja on $\frac{1}{2}$ todennäköisyydellä englanninkielinen, niin ranskankielisen kirjan todennäköisyys on

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 4 - 2 - 5}{10} = \frac{1}{10}.$$

Tämä kertoo myös ranskankielisten kirjojen osuuden kaikista kirjoista.

14. Kun a on positiivinen kokonaisluku, tarkoittaa $a!$ lukujen $1, 2, \ldots, a$ tuloa. Esimerkiksi $1! = 1$ ja $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Kun a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, mikä seuraavista **ei** voi esiintyä luvun $a! + b!$ viimeisenä numerona?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 0

Ratkaisu. **d)** 9: Voidaan laskea

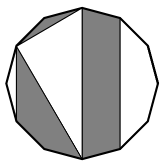
$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Jos a on suurempi kuin 5, niin $a!$ on varmasti jaollinen luvuilla 2 ja 5, jolloin se päättyy nollaan. Siispä lukujen $a!$ ja $b!$ viimeisinä numeroina voi esiintyä vain 0, 1, 2, 4 tai 6. Näiden summien viimeiset numerot ovat

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 0+2=2, \quad 0+4=4, \quad 0+6=6, \quad 1+1=2, \quad 1+2=3,$$
$$1+4=5, \quad 1+6=7, \quad 2+2=4, \quad 2+4=6, \quad 2+6=8, \quad \text{ja} \quad 4+6=10.$$

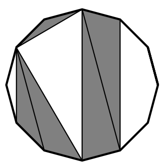
Siten summan $a! + b!$ viimeisenä numeroina voivat esiintyä 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8. Ainoa numero, joka ei voi esiintyä, on 9.

15. Alla on kuva säännöllisestä 12-kulmiosta. Jos koko 12-kulmion ala on 1, niin mikä on varjostetun alueen ala?

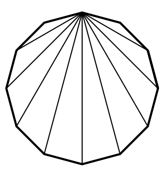


a) $\frac{7}{11}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{5}{12}$ **e)** $\frac{1}{2}$

Ratkaisu. **e)** $\frac{1}{2}$: Voidaan jakaa varjostetun alueen kolmioiksi vaikkapa näin:



Toisaalta voidaan jakaa 12-kulmiomme kolmioiksi näin:



Tässä kuviossa esiintyy viidenlaisia kolmioita, kutakin kaksi kappaletta. Varjostetussa alueessa esiintyy yksi kappale kutakin kolmiolajiketta. Siten varjostetun alueen ala on täsmälleen puolet koko 12-kulmion alasta eli 1/2.