Matematiktävling för elever i sjunde årskursen i Satakunta 2.–6.3.2020
Lösningar

1. Beräkna $73{,}5 - 22{,}25$.

a) -149 **b)** 51,25 **c)** 512,5 **d)** 5125 **e)** 93,75

Lösning. b) 51,25: Genom att räkna får vi $73{,}5 - 22{,}25 = 51{,}25$.

2. Det finns 68 äpplen i en korg. Ett visst antal äpplen sätts till. Efter detta delar åtta barn på äpplena, alla får exakt 12 äpplen. Hur många äpplen sattes till i korgen?

a) 0 **b)** 12 **c)** 20 **d)** 28. **e)** 68

Lösning. d) 28: **Metod 1:** Då alla barn fick 12 äpplen var, har de sammanlagt $8 \cdot 12 = 96$ äpplen alltså lades det till 28 äpplen i korgen.

Metod 2: Prova alla svarsalternativ. Om man inte lade till äpplen i korgen skulle varje barn få $\frac{68}{8} = 8{,}5$ äppel. Ifall man lade till 12, 20 eller 68 äppel, skulle varje barn få $\frac{68+12}{8} = \frac{80}{8} = 10$, $\frac{68+20}{8} = \frac{88}{8} = 11$ respektive $\frac{68+68}{8} = \frac{136}{8} = 17$ äppel. Inget av de föregående alternativen gav rätt svar. Märk ännu, att $\frac{68+28}{8} = \frac{96}{8} = 12$. Alltså lades det till 28 äppel i korgen.

3. Vilket av följande tal är sjutton miljoner femhundratusen fyrtionio?

a) 1 750 049 **b)** 17 050 049 **c)** 17 500 049 **d)** 170 500 049 **e)** 175 000 049

Lösning. c) 17 500 049

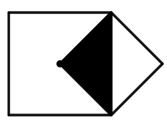
4. På hur många olika sätt kan man ordna bokstäverna i ordet "HEJ"? (Orden som bildas behöver inte betyda någonting.)

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Lösning. e) 6: Man kan välja första bokstaven i ordet från tre alternativ (H, E, J). Efter det har den andra bokstaven ändast 2 alternativ och tillsist har den sista bokstaven ett alternativ. Sammanlagt får vi då $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ st olika ord.

5. Två kvadrater överlappar varann som på bilden nedan. Den mindre kvadratens ena hörn är vid den större kvadratens medelpunkt. Den mindre kvadratens sidolängd är 1. Vad är arean på den färgade ytan?

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** 1,5
e) Svaret beror på längden av den större kvadratens sida.



Lösning. b) $\frac{1}{2}$: Den större kvadratens sida i den mindre kvadraten är den mindre kvadratens diagonal. Därför är det färgade områdets area hälften av den mindre kvadratens area, alltså $\frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$.

6. Maja och Miina skottar snö på sin gård. De märker att Maja ensam får gården skottad på 2 timmar. Om Miina skottar snön ensam, tar det 80 minuter. Hur länge måste de skotta snö, om de gör jobbet tillsammans?

a) 48 min **b)** 1 h **c)** 90 min **d)** 45 min **e)** 70 min

Lösning. a) 48 min: **Metod 1:** Om Miina och Maja skulle skotta snö i 8 timmar, skulle Miina hinna skotta snön på 6 gårdar medan Maja skulle skotta fyra gårdar. Tillsammans skulle de alltså hinna skotta snön från tio gårdar på 8 timmar. Att skotta snön på en gård skulle då ta en tiondel av denna tid, alltså $\frac{8}{10}$h, vilket motsvarar 48 minuter.

Metod 2: Efter 40 minuter har Miina skottat snön från en halv gård, medan Maja hunnit med en tredjedel. Då har de alltså skottat $\frac{5}{6}$ av gården. För att skotta hela gården behöver de alltså $\frac{6}{5} \cdot 40 = 48$ minuter.

Metod 3: Vi går igenom alla svarsalternativ. På en timme har Maja skottat snön från halva gården medan Miina skottat över hälften. Därför tar det under en timme för dem att skotta gården och de kvarstående alternativen är 45 min eller 48 min. På 45 minuter har Maja skottat snön från $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ av gården och Miina snön från $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ av gården. Tillsammans har de då skottat snön från $\frac{3}{8} + \frac{9}{16} = \frac{6+9}{16} = \frac{15}{16}$ av gården, vilket är under 1. Det sista alternativet är nu 48 minuter. Vi kan ännu på samma sätt som i förra exemplet testa att detta verkligen är rätt svar.

7. I ett rätblock har vi n lika långa kanter. Vilket av följande tal är ett möjligt värde för n?

a) 0 **b)** 4 **c)** 9 **d)** 11 **e)** Alla föregående

Lösning. b) 4: I ett rätblock är alltid de fyra kanter som är riktade åt samma håll lika långa. Alltså måste talet n vara delbart med fyra; det ända möjliga alternativet är b) 4.

8. En rektangelformad chokladplatta har **över** en rad och **över** en kolumn med chokladbitar. Sammanlagt har den n chokladbitar. Vilket av följande tal är ett möjligt värde för n?

a) 2 **b)** 23 **c)** 59 **d)** 87 **e)** Alla föregående

Lösning. d) 87: Då chokladplattan har över en rad och över en kolumn av bitar, måste talet n kunna skrivas som produkten av två positiva heltal som är större än ett (vi får talet n då vi multiplicerar antalet rader med antalet kolumner). Det ända alternativet som uppfyller detta vilkor är $87 = 3 \cdot 29$.

9. I en klass är medeltalet för betygsvitsorden i ämnet matematik exakt 8,24. Vad är det minsta antalet elever i klassen?

a) 32 **b)** 24 **c)** 30 **d)** 25 **e)** 20

Lösning. d) 25: Vi märker först, att $8{,}24 = \frac{824}{100} = \frac{412}{50} = \frac{206}{25}$. Man räknar medeltalet genom att dela vitsordens summa med antalet elever. Om vitsordens summa är n och elevernas antal m, är medeltalet alltså $\frac{n}{m}$. Talen m och n måste båda vara heltal. Då det inte går att förenkla bråket $\frac{206}{25}$, måste talet m vara minst 25.

10. Beräkna $\left|-\left(-\left(-\left(-\left(0-4\cdot 1\cdot 5\cdot \frac{1}{3}\cdot 3\cdot \frac{1}{4}\cdot \frac{1}{5}\right)\right)\right)\right)\right|$.

a) -1 **b)** 0 **c)** 1 **d)** $-\frac{4}{3}$ **e)** $\frac{4}{3}$

Lösning. c) 1: Vi märker först att om man tillägger talet 0 påverkar det inte uttrycket, därför är vi ändast intresserade av uttrycket $-4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ (nollan kan lämnas bort). Att multiplicera med 1 ändrar inte på uttryckets värde, och i uttrycket finns tal och deras inverterade tal (vilka vid multiplikation ger 1). Därför har vi $-4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = -1$. Helt i slutet kommer vi alltså att ta absolutbeloppet av 1 eller -1, i båda fallen är svaret 1.

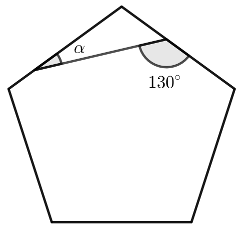
11. Hur många tresiffriga positiva heltal existerar det, i vilka siffrorna som förekommer i talen förekommer lika många gånger som sitt värde? Exempelvis talet 122 uppfyller kraven, då siffran 1 förekommer en gång och siffran 2 två gånger. I motsats uppfyller talet 120 inte de givna kraven, då exempelvis siffran 2 inte förekommer två gånger.

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** över 4

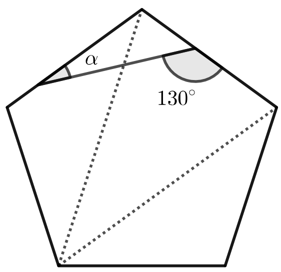
Lösning. d) 4: Siffran 0 kan inte förekomma i talet en ända gång. Dessutom, då talet ska vara tresiffrigt, kan det inte förekomma siffror större än 3 i talet. Därför är de möjliga talen 1, 2 och 3. Siffran 1 förekommer en gång eller inte alls, siffran 2 två gånger eller inte alls och siffran 3 tre gånger eller inte alls. Möjligheterna är alltså att talet består av en siffra 1 och två siffror 2 eller tre siffror 3. I det senare alternativet har vi ändast ett möjligt tal; talet 333. I det första alternativet kan siffrans 1 plats bestämma talet i fråga entydigt, och siffran 1 har tre möjliga platser i ett tresiffrigt tal (första, andra eller tredje siffran). Sammanlagt finns det alltså fyra tal som uppfyller kraven.

12. På bilden har vi en regelbunden femhörning, vars ena hörn även är hörnet av en triangel. Beräkna storleken av vinkeln α på bilden.

a) 3° **b)** 17° **c)** 22° **d)** 30° **e)** 65°

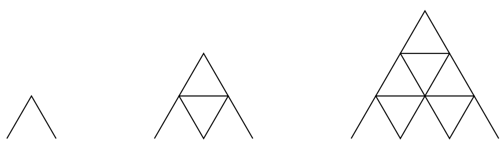


Lösning.



c) 22°: Femhörningen kan delas in i tre trianglar som på bilden (de streckade linjerna), vars vinklars summa är samma som summan av femhörningens vinklar. Alltså är femhörningens vinkelsumma $3 \cdot 180° = 540°$. I en regelbunden femhörning är alla vinklar lika stora, alltså är en av dess vinklar $\frac{540°}{5} = 108°$. Då en triangels vinkelsumma alltid är 180°, och vinkeln α är i en sådan triangel, vars två andra vinklar är 108° och $180° - 130° = 50°$ (supplementvinkel), är vinkeln $\alpha = 180° - 108° - 50° = 22°$.

13. Man bygger av spelkort ett korthus som har formen av en liksidig triangel: den lägsta våningen byggs genom att ställa kortpar bredvid varann, så att två kort alltid lutar mot varann och bildar en liksidig triangel. De följande våningarna bildas så att man först kombinerar den undre våningens korttrianglars spetsar med kort i horisontal rikting, och sedan sätter man nya korttrianglar på dessa kort. Hur många kort behöver man för att bygga ett korthus med 10 våningar?

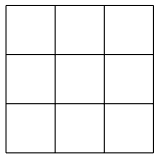


a) 155 **b)** 30 **c)** 145 **d)** 100 **e)** 175

Lösning. **a)** 155: I den högsta våningen har vi en liksidig korttriangel, och då vi går neråt en våning ökar antalet korttrianglar i våningen alltid med en triangel. Då vi beaktar att det i den lägsta våningen behövs två kort för att bilda en korttriangel och att det i de andra våningarna behövs tre kort per korttriangel, får vi att antalet kort som behövs är

$$3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) + 2 \cdot 10 = 3 \cdot 45 + 20 = 155.$$

14. Det nedanstående rutfältet färgas med grönt, rött och blått så att det i alla vågräta och lodräta rader förekommer en av varje färg exakt en gång. På hur många olika sätt kan man färga rutfältet?



a) 6 **b)** 12 **c)** 18 **d)** 24 **e)** 36

Lösning. **b)** 12: Första raden kan färgas på $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ olika sätt. När första radens färgning är fastslagen, finns det två alternativ för andra radens första ruta. Efter det bestäms färgerna på de två andra rutorna i andra raden enligt första radens färger. Tillsist bestäms tredje radens färger enligt de tidigare radernas färger. Alltså går det att färga rutfältet på $2 \cdot 6 = 12$ olika sätt.

15. Då a är ett positivt heltal, betyder $a!$ produkten av talen 1, 2, $\ldots$, a. Till exempel är $1! = 1$ och $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Talen a och b är positiva heltal. Vilket av följande alternativ kan **inte** vara talets $a! + b!$ sista siffra?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 0

Lösning. **d)** 9: Vi kan räkna att

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Om a är större än 5, är $a!$ med säkerhet delbart med talen 2 ja 5, och då är sista siffran 0. Alltså kan talens $a!$ och $b!$ sista siffra endast vara ett av följande alternativ: 0, 1, 2, 4 eller 6. Sista siffran i summan av sådana tal kan vara

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 0+2=2, \quad 0+4=4, \quad 0+6=6, \quad 1+1=2, \quad 1+2=3,$$
$$1+4=5, \quad 1+6=7, \quad 2+2=4, \quad 2+4=6, \quad 2+6=8, \quad \text{och} \quad 4+6=10.$$

Därför kan sista siffran i talet $a! + b!$ vara 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 och 8. Den ända siffran som inte kan vara den sista siffran är 9.