Satakunnan seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 2.–6.3.2020 Ratkaisuja

1. Laske 73,5 − 22,25.

a) −149 **b)** 51,25 **c)** 512,5 **d)** 5125 **e)** 93,75

Ratkaisu. **b)** 51,25: Suoraan laskemalla saadaan 73,5 − 22,25 = 51,25.

2. Korissa on 68 omenaa. Sinne laitetaan lisää jokin määrä omenoita. Tämän jälkeen kahdeksan lasta jakaa omenat keskenään saaden kukin 12 omenaa. Kuinka monta omenaa koriin laitettiin?

a) 0 **b)** 12 **c)** 20 **d)** 28 **e)** 68

Ratkaisu. **d)** 28: **Tapa 1:** Koska kukin lapsi saa 12 omenaa, on omenoita oltava yhteensä $8 \cdot 12 = 96$ eli koriin lisättiin 28 omenaa.

Tapa 2: Käydään kaikki vaihtoehdot yksitellen läpi. Jos koriin ei lisätty omenoita, niin kukin lapsi sai $\frac{68}{8} = 8{,}5$ omenaa. Jos taas lisättiin 12, 20 tai 68 omenaa, niin kukin lapsi sai $\frac{68+12}{8} = \frac{80}{8} = 10$, $\frac{68+20}{8} = \frac{88}{8} = 11$ tai $\frac{68+68}{8} = \frac{136}{8} = 17$ omenaa. Mikään edellisistä vaihtoehdoista ei tuota oikeaa vastausta. Huomataan vielä, että on $\frac{68+28}{8} = \frac{96}{8} = 12$. Näin ollen siis lisättiin 28 omenaa.

3. Mikä seuraavista luvuista on seitsemäntoista miljoonaa viisisataatuhatta neljäkymmentäyhdeksän?

a) 1 750 049 **b)** 17 050 049 **c)** 17 500 049 **d)** 170 500 049 **e)** 175 000 049

Ratkaisu. **c)** 17 500 049

4. Kuinka monella eri tavalla sanan "HEI"kirjaimet voidaan järjestää? (Muodostuvan merkkijonon ei tarvitse tarkoittaa mitään.)

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Ratkaisu. **e)** 6: Sanan ensimmäinen kirjain voidaan valita kolmesta eri vaihtoehdosta (H, E, I). Tämän jälkeen toiselle kirjaimelle on enää kaksi vaihtoehtoa ja lopuksi viimeiselle kirjaimelle yksi vaihtoehto. Erilaisia vaihtoehtoja on siis $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ kappaletta.

5. Kaksi neliötä leikkaavat kuvan mukaisesti eli pienemmän neliön yksi kärki on isomman neliön keskipisteessä. Pienemmän neliön sivun pituus on 1. Mikä on väritetyn alueen pinta-ala?

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** 1,5
e) Vastaus riippuu isomman neliön sivun pituudesta.

Ratkaisu. **b)** $\frac{1}{2}$: Isomman neliön yksi sivuista on pienemmän neliön lävistäjä. Täten väritetyn alueen pinta-ala on puolet pienen neliön pinta-alasta eli $\frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$.

6. Maija ja Miina luovat pihalta lunta. He huomaavat, että jos Maija tekee työn yksinään, kestää siinä 2 tuntia. Jos Miina tekee työn yksinään, kestää työssä 80 minuuttia. Kuinka kauan he joutuvat luomaan lunta, jos he luovat lumen yhdessä?

a) 48 min **b)** 1 h **c)** 90 min **d)** 45 min **e)** 70 min

Ratkaisu. a) 48 min: **Tapa 1:** Jos Miina ja Maija loisivat lunta 8 tuntia, saisi Miina luotua lumet kuudelta pihalta ja Maija neljältä pihalta. Yhteensä he siis saavat luotua kymmeneltä pihalta lumet kahdeksassa tunnissa. Yhden pihan lumenluonti vie siis kymmenesosan tästä ajasta, eli $\frac{8}{10}$h, joka on 48 minuuttia.

Tapa 2: Neljänkymmen minuutin jälkeen Miina on luonut puolen pihan lumet ja Maija kolmasosan. Yhteensä on siis tehty $\frac{5}{6}$ koko työstä. Koko työn kesto on siis $\frac{6}{5} \cdot 40 = 48$ minuuttia.

Tapa 3: Käydään kaikki eri vaihtoehdot läpi. Tunnin aikana Maija on luonut lumet puolikkaalta pihalta ja Miina yli puolelta. Siispä pihan luontiin menee alle tunti aikaa ja ainoat mahdolliset vaihtoehdot ovat 45 min tai 48 min. Kun aikaa on kulunut 45 minuuttia, niin Maija on luonut lumet $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ pihalta ja Miina $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ pihalta. Tällöin he ovat yhteensä luoneet lumet $\frac{3}{8} + \frac{9}{16} = \frac{6+9}{16} = \frac{15}{16}$ pihalta. Tämä on alle yhden pihan, joten ainoaksi vaihtoehdoksi jää 48 minuuttia. Voidaan vielä edellistä kohtaa vastaavalla tavalla tarkistaa, että tämä todella on oikea vastaus.

7. Eräässä suorakulmaisessa särmiössä on täsmälleen n yhtä pitkää sivua. Mikä seuraavista on luvulle n mahdollinen arvo?

a) 0 **b)** 4 **c)** 9 **d)** 11 **e)** Kaikki edelliset

Ratkaisu. b) 4: Suorakulmaisessa särmiössä särmät jakautuvat aina kolmeen neljän särmän joukkoon. Kussakin joukossa kaikki särmät ovat yhtä pitkät. Siispä luvun n on oltava neljällä jaollinen ja ainoa mahdollinen vaihtoehto on neljä.

8. Suorakulmion muotoisessa suklaalevyssä on **yli** yksi sarake ja **yli** yksi rivi suklaapaloja. Yhteensä siinä on n suklaapalaa. Mikä seuraavista on mahdollinen luvun n arvo?

a) 2 **b)** 23 **c)** 59 **d)** 87 **e)** Kaikki edelliset

Ratkaisu. d) 87: Jotta suklaalevyssä on yli yksi sarake ja yli yksi rivi suklaapaloja, niin luku n pitää pystyä esittämään kahden lukua yksi suuremman positiivisen kokonaisluvun tulona, sillä luku n saadaan, kun sarakkeiden määrä kerrotaan rivien määrällä. Ainoa vaihtoehdoista, joka toteuttaa tämän ehdon, on $87 = 3 \cdot 29$.

9. Eräässä luokassa matematiikan todistusarvosanojen keskiarvo on täsmälleen 8,24. Mikä on pienin mahdollinen määrä oppilaita luokassa?

a) 32 **b)** 24 **c)** 30 **d)** 25 **e)** 20

Ratkaisu. d) 25: Huomataan aluksi, että $8{,}24 = \frac{824}{100} = \frac{412}{50} = \frac{206}{25}$. Keskiarvo lasketaan jakamalla arvosanojen summa oppilaiden määrällä. Jos arvosanojen summa on n ja oppilaiden määrä m, on keskiarvo siis $\frac{n}{m}$. Näiden on molempien oltava kokonaislukuja. Koska lukua $\frac{206}{25}$ ei voi sieventää, on luvun m pienin mahdollinen arvo 25.

10. Laske $\left|-\left(-\left(-\left(-\left(0-4\cdot 1\cdot 5\cdot \frac{1}{3}\cdot 3\cdot \frac{1}{4}\cdot \frac{1}{5}\right)\right)\right)\right)\right|$.

a) -1 **b)** 0 **c)** 1 **d)** $-\frac{4}{3}$ **e)** $\frac{4}{3}$

Ratkaisu. c) 1: Havaitaan ensinnäkin, ettei nollan lisääminen muuta luvun arvoa, joten tämän takia vain lausekkeen sisällä olevasta lausekkeesta vain osuus $-4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ on kiinnostava. Huomataan, että ykkösellä kertominen ei muuta lausekkeen arvoa ja lisäksi lausekkeesta löytyy aina luku ja sen käänteisluku. Siis on $-4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = -1$. Siispä lopuksi otetaan joko luvusta 1 tai -1 itseisarvo. Molemmissa tapauksissa tulos on 1.

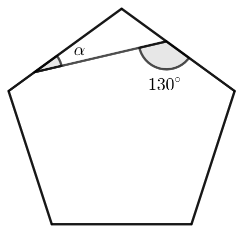
11. Kuinka monta sellaista kolminumeroista positiivista kokonaislukua on olemassa, jossa jokainen siinä esiintyvä numero esiintyy arvonsa verran kertoja? Esimerkiksi luku 122 toteuttaa halutut ehdot, sillä numero 1 esiintyy kerran ja numero 2 kaksi kertaa. Sen sijaan luku 120 ei toteuta haluttuja ehtoja, sillä esimerkiksi lukua 2 ei esiinny kahta kertaa.

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** yli 4

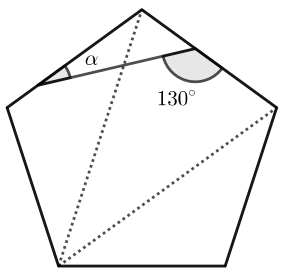
Ratkaisu. d) 4: Numero 0 ei voi esiintyä luvussa kertaakaan. Lisäksi, koska luku on kolminumeroinen, niin yli numeron 3 suuruisia numeroita ei voi luvussa esiintyä. Täten ainoat mahdolliset numerot ovat 1, 2 ja 3. Numero 1 esiintyy kerran tai ei lainkaan, numero 2 kaksi kertaa tai ei lainkaan ja numero 3 kolme kertaa tai ei lainkaan. Näin ollen mahdollisuudet ovat, että luku koostuu yhdestä numerosta 1 ja kahdesta numerosta 2 tai kolmesta numerosta 3. Jälkimmäisessä tapauksessa on vain yksi mahdollinen vaihtoehto; luku 333. Ensimmäisessä tapauksessa taas numeron 1 sijainti määrää luvun yksikäsitteisesti ja numerolle 1 on kolme mahdollista paikkaa (ensimmäisenä, toisena tai viimeisenä). Yhteensä vaihtoehtoja on siis neljä.

12. Kuvassa on säännöllinen viisikulmio, jonka yksi kärki on myös kolmion kärki. Laske kuvaan merkityn kulman α suuruus.

a) $3°$ **b)** $17°$ **c)** $22°$ **d)** $30°$ **e)** $65°$

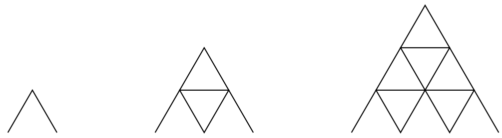


Ratkaisu.



c) $22°$: Viisikulmio voidaan kuvanmukaisilla katkoviivoilla jakaa kolmeen kolmioon, joiden kulmien summa on sama kuin viisikulmion kulmien summa. Siispä viisikulmion kulmien summa on $3 \cdot 180° = 540°$. Säännöllisessä viisikulmiossa kulmat ovat yhtä suuret, joten sen yhden kulman suuruus on $\frac{540°}{5} = 108°$. Lisäksi, koska kolmion vieruskulmien summa on $180°$, niin kulma α on sellaisessa kolmiossa, jonka kaksi kulmaa ovat $108°$ ja $180° - 130° = 50°$. Täten on $\alpha = 180° - 108° - 50° = 22°$.

13. Korteista rakennetaan tasasivuisen kolmion muotoinen korttitalo: alin kerros muodostetaan asettamalla vierekkäin korttipareja, joissa kaksi korttia nojaa toisiaan vasten muodostaen tasasivuisen kolmion. Seuraavat kerrokset muodostetaan yhdistäen ensin alemman kerroksen korttikolmioiden huiput vaakatasossa olevilla korteilla ja sen jälkeen asettamalla uudet korttikolmiot näiden korttien päälle. Kuinka monta korttia tarvitaan, jos halutaan rakentaa korttitalo, jossa on 10 kerrosta?



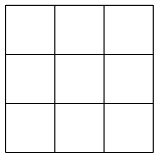
a) 155 **b)** 30 **c)** 145 **d)** 100 **e)** 175

Ratkaisu. **a)** 155: Ylimmässä kerroksessa on yksi tasasivuinen korttikolmio, ja alaspäin mentäessä kerroksen korttikolmioiden lukumäärä kasvaa aina yhdellä. Kun otetaan huomioon, että alimmassa kerroksessa yhden korttikolmion muodostamiseen tarvitaan kaksi korttia ja muissa kerroksissa kolme korttia, saadaan korttien lukumääräksi

$$3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) + 2 \cdot 10 = 3 \cdot 45 + 20 = 155.$$

14. Alla oleva ruudukko väritetään vihreällä, punaisella ja sinisellä siten, että jokaisella vaakarivillä ja jokaisella pystyrivillä kukin väri esiintyy täsmälleen kerran. Monellako tavallaväritys voidaan tehdä?

a) 6 **b)** 12 **c)** 18 **d)** 24 **e)** 36



Ratkaisu. **b)** 12: Ensimmäiselle riville erilaisia värityksiä on $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Kun ensimmäisen rivin väritys on kiinnitetty, niin toisen rivin ensimmäiselle ruudulle on kaksi vaihtoehtoa. Tämän jälkeen toisen rivin kahden muun ruudun värit määräytyvät ensimmäisen rivin perusteella. Lopuksi kolmannen rivin värit määräytyvät aiempien väritysten perusteella. Siispä väritysvaihtoehtoja on $2 \cdot 6 = 12$.

15. Kun a on positiivinen kokonaisluku, tarkoittaa $a!$ lukujen 1, 2, ..., a tuloa. Esimerkiksi $1! = 1$ ja $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Kun a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja, mikä seuraavista **ei** voi esiintyä luvun $a! + b!$ viimeisenä numerona?

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 0

Ratkaisu. **d)** 9: Voidaan laskea

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Jos a on suurempi kuin 5, niin $a!$ on varmasti jaollinen luvuilla 2 ja 5, jolloin se päättyy nollaan. Siispä lukujen $a!$ ja $b!$ viimeisinä numeroina voi esiintyä vain 0, 1, 2, 4 tai 6. Näiden summien viimeiset numerot ovat

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 0+2=2, \quad 0+4=4, \quad 0+6=6, \quad 1+1=2, \quad 1+2=3,$$
$$1+4=5, \quad 1+6=7, \quad 2+2=4, \quad 2+4=6, \quad 2+6=8, \quad \text{ja} \quad 4+6=10.$$

Siten summan $a! + b!$ viimeisenä numeroina voivat esiintyä 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8. Ainoa numero, joka ei voi esiintyä, on 9.