Helsingin seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 5–9.3.2018 Ratkaisuita

1. Laske $(10-1)(10+1)$.

a) 10 **b)** 20 **c)** 49 **d)** 99 **e)** 100

Ratkaisu. Suoraan laskemalla saadaan $(10-1)(10+1) = 9 \cdot 11 = 99$. Toinen tapa ratkaista tehtävä olisi käyttää kaavaa $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, jolla $(10-1)(10+1) = 10^2 - 1^2 = 100 - 1 = 99$.

2. Laske $56 \cdot 28$.

a) 1445 **b)** 1556 **c)** 1568 **d)** 1602 **e)** 1604

Ratkaisu. Ratkaisun voi laskea suoraan esimerkiksi seuraavasti: $56 \cdot 28 = (50+6) \cdot (20+8) = 50 \cdot 20 + 6 \cdot 20 + 50 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 1000 + 120 + 400 + 48 = 1568$. On myös esimerkiksi mahdollista havaita, että tuloksen täytyy päättyä samaan numeroon kuin $6 \cdot 8 = 48$, jolloin oikean vastausvaihtoehdon täytyy olla c).

3. Leivottaessa 18 suurta muffinsia tarvitaan 300g suklaahippuja. Kuinka paljon suklaahippuja tarvitaan leivottaessa 24 suurta muffinsia?

a) 200g **b)** 375g **c)** 400g **d)** 450g **e)** 600g

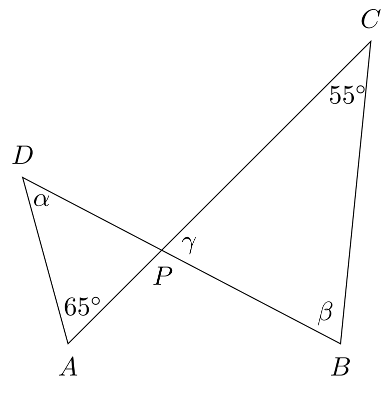
Ratkaisu. Tarvittujen suklaahippujen määrä kasvaa suoraan verrannollisesti leivottavien muffinsien määrän mukana. Koska $\frac{24}{18} \cdot 300 = 400$, on oikea vastaus c).

4. Laske $1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-4) \cdot \ldots \cdot 9 \cdot (-10)$.

a) 0 **b)** 1374865 **c)** -1374862 **d)** 3628800 **e)** -3628800

Ratkaisu. Laskettavassa tulossa luku 0 ei esiinny tulontekijänä, joten tulo ei ole nolla. Täten vaihtoehto a) ei ole oikein. Tulossa on $\frac{10}{2} = 5$ negatiivista tulontekijää, joten tulon arvo on negatiivinen. Siis vaihtoehdot b) ja d) ovat vääriä. Lisäksi tulo on jaollinen kymmenellä, koska tulon tekijänä esiintyy luku 10, joten c) ei voi olla oikea vaihtoehto. Jäljelle jää e).

5. Laske $\alpha + \beta + 2\gamma$. Pisteet A, P ja C ovat samalla suoralla, kuten myös pisteet D, P ja B.



a) 60° **b)** 120° **c)** 180° **d)** 240° **e)** 300°

Ratkaisu. Koska kulmat $\angle DPA$ ja $\angle BPC$ ovat ristikulmia, niin $\angle DPA = \angle BPC = \gamma$. Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin $\alpha + \gamma + 65° = 180°$ ja $\beta + \gamma + 55° = 180°$. Täten $\alpha + \gamma + 65° + \beta + \gamma + 55° = 360°$ eli $\alpha + \beta + 2\gamma = 240°$.

6. Määritellään laskuoperaatio $\star$:

$$a \star b = a + 2b.$$

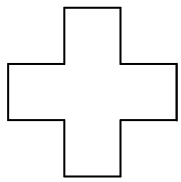
Päteekö joillakin a ja b, että

$$a \star b = b \star a?$$

a) Kyllä, jos ja vain jos $a = b$ **b)** Ei koskaan. **c)** Ainoastaan, jos $a = 1 = b$.
d) Ainoastaan, jos $a = 0$ ja $b = 1$. **e)** Kyllä, kaikilla luvuilla a ja b.

Ratkaisu. Huomataan, että
$$a \star b = b \star a,$$
jos ja vain jos
$$a + 2b = b + 2a,$$
eli $a = b$. Oikea vastaus on tätën a).

7. Kuvassa on plus-merkki, jonka korkeus ja leveys on 8. Kaikki kuvan kulmat ovat suoria. Määritä ääriviivan pituus.



a) 20 **b)** 24 **c)** 28 **d)** 32 **e)** Ei pysty määrittämään tehtävässä annetuilla tiedoilla.

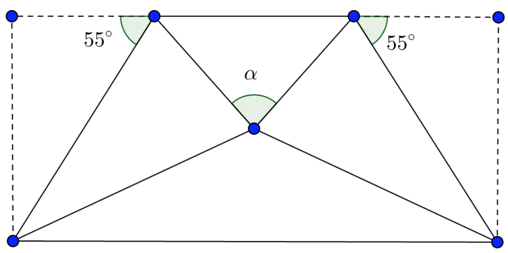
Ratkaisu. Piirretään plus-merkin ympärille neliö, jonka sivun pituus on tällöin 8. Havaitaan, että neliön ja plus-merkin piirit ovat samat, sillä plus-merkin sisäänpäin käännetyt kulmat ja neliön ulospäin käännetyt kulmat ovat toistensa peilikuvia. Täten plus-merkin piirin pituus on $4 \cdot 8 = 32$.

8. Kahdella eri autolla ajetaan 120 kilometrin matka. Toisella autolla ajetaan keskinopeudella 100km/h ja toisella 80km/h. Matkaan lähdetään molemmilla autoilla samanaikaisesti, mutta nopeammalla autolla pysähdytään kesken matkan kun taas hitaammalla ei. Kuinka pitkä pysähdys on, kun perille saavutaan samanaikaisesti molemmilla autoilla?

a) 5 min **b)** 10 min **c)** 12 min **d)** 15 min **e)** 18 min

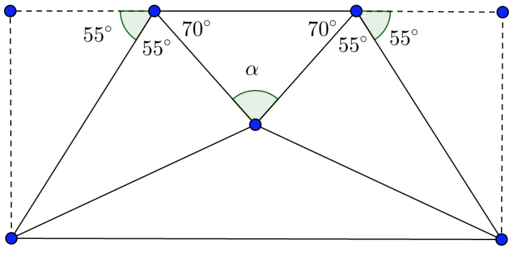
Ratkaisu. Hitaammin ajettavalta autolta kuluu matkaan $120\text{km} \cdot 80\text{km/h} = 1,5\text{h} = 1\text{h } 30 \text{ min}$ ja nopeammin ajattavalta ilman pysähdystä $120\text{km} \cdot 100\text{km/h} = 1,2\text{h} = 1\text{h } 12 \text{ min}$. Näin ollen pysähdys on 18 minuuttia pitkä.

9. Kuvassa on suorakulmainen paperiarkki, jonka kaksi kulmaa on taitettu paperin päälle kohtaamaan toisensa. Määritä kulma α.



a) 90° **b)** 70° **c)** 55° **d)** 40° **e)** Ei pysty määrittämään tehtävässä annetuilla tiedoilla.

Ratkaisu. Paperin päälle taitetut kolmiot ovat peilikuvia niiden alkuperäisestä sijainnista tyhjiksi jäävistä kolmioista. Näin ollen kummankin paperin päälle taitetun kolmion huippukulma on 55°. Täten α-kärkisen kolmion muut kulmat ovat suurudeltaan $180° - (55° + 55°) = 70°$. Kulma α on siis $180° - 2 \cdot 70° = 40°$.



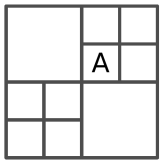
10. Muodostetaan luvuista $-1, 0, 1, 2$ kaikki mahdolliset parit, joissa luvut ovat erisuuret. Lasketaan kunkin parin lukujen tulo. Kuinka suuressa osuudessa näitä tuloja tulon arvo on nolla?

a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** $\frac{1}{2}$

Ratkaisu. Tapa 1: Tulo on nolla täsmälleen silloin, kun vähintään yksi tulontekijöistä on nolla. Yhteensä muodostettavia tuloja on $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, sillä jokaista neljää lukua kohti on kolme muuta lukua, jotka voivat olla sen pareja, ja toisaalta kukin tulo lasketaan tällä tavalla kahdesti. Näistä pareista kolmessa esiintyy luku 0. Täten kysytty osuus on $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Tapa 2: Ratkaistaan tehtävä kirjoittamalla kaikki mahdolliset tulot. Jos toinen valittavista luvuista on -1, niin toinen luku on $0, 1$ tai 2. Näistä saadaan tulot $0, -1$ ja -2 vastaavasti. Jos toinen valittavista luvuista on 0, eikä kumpikaan -1 (koska tämä tapaus on jo tarkasteltu), niin toinen luvuista on 1 tai 2. Laskettavat tulot ovat 0 ja 0. Lisäksi, jos toinen valituista luvuista on 1, eikä kumpikaan luvuista ole -1 tai 0, niin toinen luvuista on 2. Tällöin tulo on 2. Siis kaiken kaikkiaan eri tuloja on kuusi kappaletta ja niistä kolmessa tulo on nolla. Täten kysytty osuus on $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

11. Kuvassa on neliöitä. Isoimman neliön ala on 4096cm^2. Kuinka pitkä on neliön A sivun pituus?



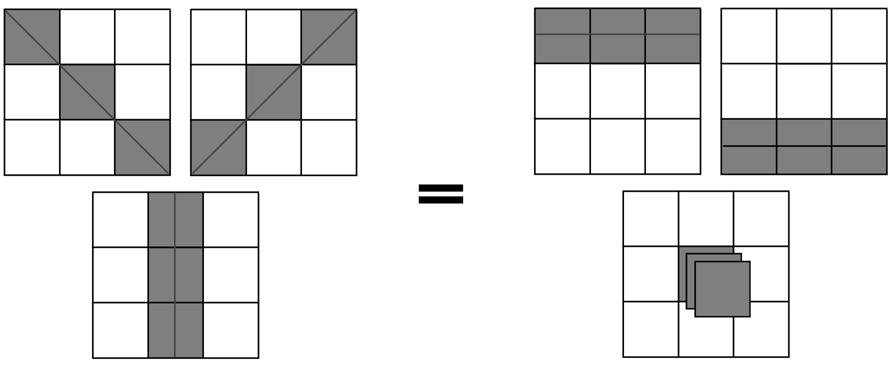
a) 2cm **b)** 4cm **c)** 8cm **d)** 16cm **e)** 32cm

Ratkaisu. Koska kuvan isoimman neliön ala on $4096\text{cm}^2 = 2^{12}\text{cm}^2$, niin sen sivun pituus on $2^{\frac{12}{2}}\text{cm} = 2^6\text{cm} = 64\text{cm}$. Jos neliön A sivun pituus on x, isoimman neliön sivun pituus saadaan laskemalla yhteen kaksi neliön sivua, joista molemman pituus on x, ja yksi neliön sivu, jonka pituus on $2 \cdot x$. Saadaan $x + x + 2x = 64\text{cm}$, jolloin $x = \frac{64\text{cm}}{4} = 16\text{cm}$.

12. 3×3-ruudukkossa on jokaisessa ruudussa kokonaisluku. Kunkin vaaka- ja pystyrivin alkioiden (ruuduissa olevien lukujen) summa on 30. Lisäksi alkioiden summa jokaisella diagonaalilla (vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan tai oikeasta yläkulmasta vasempaan alakulmaan) on 30. Mikä luku on ruudukon keskimmäisessä ruudussa?

a) 1 **b)** 5 **c)** 10 **d)** 15
e) Keskimmäisessä ruudussa olevalle luvulle on useita eri vaihtoehtoja.

Ratkaisu. Lasketaan yhteen ruudukon kaksi vinoriviä ja keskimmäinen pystyrivi (kuvan vasen puoli). Koska jokaisen näistä riveistä summa on 30, kokonaissummaksi saadaan $30+30+30 = 90$. Toisaalta samat ruudut saadaan poimimalla ruudukon ylin ja alin vaakarivi, sekä kolme kappaletta keskimmäistä ruutua (kuvan oikea puoli). Jos keskimmäisen ruudun luku on x, niin kokonaissumma on tällä tavalla laskettuna $30 + 30 + 3x = 60 + 3x$. Syntyvästä yhtälöstä $60 + 3x = 90$ saadaan ratkaistua, että $x = (90 - 60)/3 = 10$. Keskimmäisessä ruudussa olevan luvun siis täytyy olla 10.



13. Kuinka monella tavalla luvut $1, 2, \ldots, 9$ voidaan kirjoittaa peräkkäin niin, että jokaisen kahden peräkkäisen luvun summa on vähintään 10 ja kahden reunimmaisen luvun (oikean ja vasemman reunan) summa on vähintään 11?

a) 0 **b)** 1 **c)** 5 **d)** 10 **e)** 100

Ratkaisu. Ratkaisutapa 1: Koska kahden peräkkäisen luvun summa on vähintään 10 ja reunimmaisten lukujen summa vähintään 11, niin kirjoitettujen lukujen summa kerrottuna kahdella on vähintään

$$8 \cdot 10 + 11 = 91.$$

Toisaalta kaikkien kirjoitettujen lukujen summa kerrottuna kahdella on

$$(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+(5+5)+(6+4)+(7+3)+(8+2)+(9+1) = 9 \cdot 10 = 90.$$

Mutta nyt pitäisi olla $91 \leq 90$, mikä on mahdotonta. Siis ei ole yhtään mahdollista tapaa sijoittaa lukuja taululle halutulla tavalla.

Ratkaisutapa 2: Luku 1 ei voi olla kumpikaan reunimmaisista luvuista, sillä muutoin jotta reunimmaisten lukujen summa olisi vähintään 11, niin toisen reunimmaisen luvun täytyisi olla vähintään 10. Toisaalta jos toinen kahdesta peräkkäisestä luvusta on 1, niin toisen on oltava 9, sillä muutoin lukujen summa on pienempi kuin 10. Tämä on mahdotonta, sillä lukua 1 edeltävä luku ja luvun 1 jälkeinen luku eivät voi molemmat olla 9. Näin ollen mahdollisia asettelutapoja ei ole yhtään.

14. Minnalla on kahdeksan valkoista ja viisi värillistä kuutiopalikkaa. Kaikki värilliset palikat ovat keskenään erivärisiä. Hän haluaa asetella ne päällekkäin korkeudeltaan kolmentoista palikan torniksi niin, että mitkään kaksi värillistä palikkaa eivät koske toisiaan. Miten monta erilaista tornia on mahdollista rakentaa näin?

a) 52 **b)** 152 **c)** 10557 **d)** 15120 **e)** 20010

Ratkaisu. Asetetaan ensin valkoiset palikat päällekkäin. Värilliset voivat tulla näiden väliin, tornin pohjalle, tai tornin huipulle. Yhteensä värillisille palikoille on siis yhdeksän paikkaa. Kuhunkin paikkaan voi tulla korkeintaan yksi palikka, sillä muutoin kaksi värillistä palikkaa koskisi toisiaan. Ensimmäisellä värillisellä palikalla on siis 9 vaihtoehtoa, tämän jälkeen seuraavalla on 8, sitä seuraavalla 7, neljännellä 6 ja viimeisellä 5. Yhteensä siis

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$$

vaihtoehtoa.

15. Laske

$$\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{2016 \cdot 2021}.$$

a) $\frac{1}{2021}$ **b)** $\frac{1}{7}$ **c)** 2021 **d)** $\frac{2016}{2021}$ **e)** $\frac{2020}{5 \cdot 2021}$

Ratkaisu. Huomataan, että jokaiselle positiiviselle luvulle x pätee

$$\frac{1}{x \cdot (x+5)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{x \cdot (x+5)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5 + x - x}{x \cdot (x+5)} = \frac{1}{5} \left(\frac{5+x}{x \cdot (x+5)} - \frac{x}{x \cdot (x+5)} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} \right)$$

Hyödyntämällä tätä kaavaa summan voi kirjoittaa uudelleen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{2016 \cdot 2021} \\
&\quad = \frac{1}{5} \left(\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{2016}\right) + \left(\frac{1}{2016} - \frac{1}{2021}\right) \right)
\end{aligned}$$

Välissä olevat luvut kumoavat toisensa ja jäljelle jää

$$\frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{2021}\right) = \frac{2020}{5 \cdot 2021}$$