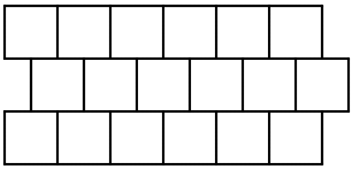
Turun seudun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 29.2–4.3.2016 Ratkaisuita

1. Laske $140 \cdot 12 - 130 \cdot 11$.

a) 50 **b)** 100 **c)** 150 **d)** 200 $\boxed{\textbf{e)}\ 250}$

Ratkaisu. Suoralla laskulla $140 \cdot 12 - 130 \cdot 11 = 1680 - 1430 = 250$.

2. Oheinen kuvio väritetään kolmella värillä niin, että jokainen ruutu väritetään täsmälleen yhdellä värillä, ja mikäli kahdella ruudulla on yhtään yhteistä sivua, ei niitä saa värittää samalla värillä. Montako väritysvaihtoehtoa on?



a) 1 **b)** 2 **c)** 3 $\boxed{\textbf{d)}\ 6}$ **e)** 60

Ratkaisu. Väritetään ensin vasemman puolen yläkulman ruutu jollakin kolmesta eri väristä. Tämän voi tehdä kolmella eri tavalla. Sen oikealla puolella olevan ruudun voi värittää nyt kahdella eri tavalla. Mutta nyt ei ole vaikea havaita, että kaikki muut värit määräytyvätkin yksikäsitteisesti jo tehdyistä valinnoista. Siten eri väritystapoja on $3 \cdot 2 = 6$ erilaista.

3. Laske $(a + b)^2 - (a - b)^2$, kun $a = 22$ ja $b = 10$. Tässä x^2 tarkoittaa tietenkin tuloa $x \cdot x$.

a) 480 **b)** 580 **c)** 680 $\boxed{\textbf{d)}\ 880}$ **e)** 1080

Ratkaisu. Suoralla laskulla $(a+b)^2-(a-b)^2 = a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab = 4ab = 4\cdot22\cdot10 = 880$.

4. Kahden tuntemattoman luvun summa on 24 ja niiden erotus on 2. Mikä on niiden tulo?

a) 111 **b)** 112 $\boxed{\textbf{c)}\ 143}$ **d)** 155 **e)** 156

Ratkaisu. Olkoot luvut a ja b niin, että $a+b = 24$ ja $a-b = 2$. Tällöin $26 = 24+2 = a+b+a-b = 2a$, eli $a = 13$ ja $b = a - 2 = 11$. Lukujen tulo on siis $ab = 13 \cdot 11 = 143$.

5. Kaksi autoa lähtee ajamaan samasta pisteestä vastakkaisiin suuntiin. Ne ajavat ensiksi kilometrin suoraan, kääntyvät sitten ajosuuntiinsa nähden vasemmalle suoran kulman verran, ajavat kolme kilometriä, kääntyvät taas vasemmalle suoran kulman verran ja ajavat taas kilometrin suoraan. Kuinka kaukana autot ovat toisistaan tämän jälkeen?

$\boxed{\textbf{a)}\ 6\,\text{km}}$ **b)** 7 km **c)** 8 km **d)** 9 km **e)** 10 km

Ratkaisu. Autot etääntyvät lähtöpaikasta vastakkaisiin suuntiin kumpikin tasan 3 kilometriä, eli niiden välinen etäisyys lopussa on $3 + 3 = 6$ kilometriä.

6. Mikä on luvun $7^7 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ viimeinen numero?

a) 7 **b)** 1 **c)** 5 **d)** 9 $\boxed{\textbf{e)}\ 3}$

Ratkaisu. Positiivisten kokonaislukujen tulon viimeinen numero riippuu tietenkin vain tulontekijöiden viimeisistä numeroista. Kun luku kerrotaan seitsemällä, sen viimeinen numero muuttuu näin:

$$0 \mapsto 0,\quad 1 \mapsto 7,\quad 2 \mapsto 4,\quad 3 \mapsto 1,\quad 4 \mapsto 8,\quad 5 \mapsto 5,\quad 6 \mapsto 2,\quad 7 \mapsto 9,\quad 8 \mapsto 6,\quad 9 \mapsto 3.$$

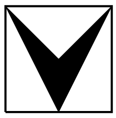
Erityisesti tulojen $7, 7 \cdot 7, 7 \cdot 7 \cdot 7, \dots, 7^7$ viimeiset numerot ovat siis 7, 9, 3, 1, 7, 9 ja 3.

7. Puolilillaan oleva vesikannu painaa 500 g ja täynnä oleva vesikannu painaa 950 g. Kuinka paljon painaa täyden vesikannun pelkkä vesi?

a) 500 g **b)** 800 g **c)** 1000 g **d)** 950 g $\boxed{\text{e) } 900\,\text{g}}$

Ratkaisu. Lisäämällä puolillaan täyteen olevaan kannuun puolikannullista vettä koko kannun paino nousee $950\,\text{g} - 500\,\text{g} = 450\,\text{g}$. Jos puoli kannullista vettä painaa 450 g, niin kokonainen kannullinen vettä painaa 900 g.

8. Määritä väritetyn alueen pinta-ala. Kuvassa on neliö, jonka sivun pituus on 1, ja josta on jätetty valkoiseksi yläkulmista alakeskelle yltävät suorakulmaiset kolmiot sekä yläreunasta keskipisteeseen yltävä tasakylkinen kolmio.



a) $\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{5}$ $\boxed{\text{d) } \frac{1}{4}}$ **e)** $\frac{1}{2}$

Ratkaisu. Koko neliön ala on tietenkin $1 \cdot 1 = 1$. Vasemmassa alakulmassa olevan suorakulmaisen kolmion ala on $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$. Samaten oikeassa alakulmassa sijaitsevan kolmion ala on $\frac{1}{4}$. Ylhäällä olevan tasakylkisen kolmion, sen joka yltää neliön keskipisteeseen, ala on $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Täten väritetyn alueen ala on

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

9. Ensimmäiselle riville kirjoitetaan yksinäinen luku 1. Toiselle riville kirjoitetaan luvut 2, 3 ja 4 niin, että luku 3 tulee luvun 1 alle. Edelleen kolmannelle riville kirjoitetaan luvut 5, 6, 7, 8 ja 9 niin, että luku 7 tulee luvun 3 alle. Näin jatketaan ja syntyy seuraavanlainen kuvio:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & 3 & 4 & \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Mikä on näin muodostetussa kuviossa kymmenennen rivin vasemmanpuoleisin luku?

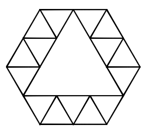
a) 81 $\boxed{\text{b) } 82}$ **c)** 99 **d)** 100 **e)** 101

Ratkaisu. Osoittautuu, että n. rivin oikeanpuoleisin luku on aina n^2. Eräs tapa vakuuttua tästä on siirtää kullakin rivillä olevia lukuja hieman ja "taittaa" rivi sitten seuraavalla tavalla:

$$1 \qquad \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 3 & 8 & 15 \\ 5 & 6 & 7 & 14 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{array} \qquad \cdots$$

Tiedämme siis, että yhdeksännen rivin oikeanpuoleisin luku on $9^2 = 81$. Kymmenennen rivin ensimmäisen luvun on siis oltava $9^2 + 1 = 82$.

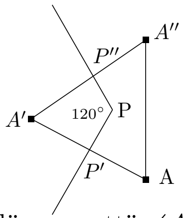
10. Seuraavassa kuviossa on iso tasasivuinen kolmio, jonka piiri (eli ympärysmitta) on 42, sekä 15 pientä tasasivuista kolmiota. Mikä onkaan koko kuvion piiri?



a) 45 **b)** 46 **c)** 48 **d)** 50 $\boxed{\text{e) } 56}$

Ratkaisu. Ison kolmion sivun pituuden on oltava $42/3 = 14$, ja pienen kolmion sivun piirin edelleen $14/3$. Koko kuvion piiri on nyt $12 \cdot 14/3 = 4 \cdot 14 = 56$.

11. Piste P on kolmion $AA'A''$ sisällä, ja siitä lähtee kaksi puolisuoraa $120°$ asteen kulmassa. Puolisuorat leikkaavat suorassa kulmassa kolmion sivut AA' ja $A'A''$ pisteissä P' ja P''. Lisäksi tiedetään, että $AP' = P'A'$, $A'P'' = P''A''$ ja $AA' = A'A''$. Kuinka suuret ovat viisikulmion $AP'PP''A''$ kulmat?



a) $60°, 60°, 90°, 90°, 240°$
b) $60°, 80°, 90°, 90°, 240°$
c) $80°, 90°, 90°, 120°, 160°$
d) $80°, 80°, 90°, 90°, 240°$
e) $90°, 90°, 120°, 120°, 120°$

Ratkaisu. Tiedämme, että $\angle AP'P = \angle PP''A'' = 90°$. Lisäksi $\angle P'PP'' = 360° - 120° = 240°$. Koska kolmiossa $\triangle AA'A''$ ovat sivut AA' ja $A'A''$ yhtä pitkät, niin $\angle A''AP' = \angle P''A''A$.

Tunnetusti kolmion kulmien summa on $180°$. Toisaalta, viisikulmion voi kahdella lävistäjällä ainoa pilkkoa kolmeksi kolmioksi, ja viisikulmion kulmien summa on tällöin syntyneiden kolmen kolmion kulmien summien summa, eli $3 \cdot 180° = 540°$.

Näin ollen

$$\angle A''AP' = \angle P''A''A = \frac{1}{2} \cdot (540° - 240° - 2 \cdot 90°) = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60°.$$

Siis viisikulmion $AP'PP''A''$ kulmat ovat $60°, 60°, 90°, 90°, 240°$.

12. Luvussa $3943023x$ on viimeinen numero kirjoitettu epäselvästi, mutta itse luvun tiedetään oleva jaollinen kuudella. Mitä arvoja x voi saada?

a) 0 ja 6 **b)** 0 ja 8 **c)** 1 ja 7 **d)** 1 ja 9 **e)** 2 ja 6

Ratkaisu. Luku on jaollinen kahdella jos ja vain jos luvun viimeinen numero on $0, 2, 4, 6$ tai 8. Luku on jaollinen kolmella jos ja vain jos $3 + 9 + 4 + 3 + 0 + 2 + 3 + x = 24 + x$ on jaollinen kolmella. Tämä tarkoittaa samaa kuin, että x on jaollinen kolmella. Mutta yksinumeroinen luku on jaollinen kahdella ja kolmella täsmälleen silloin kun se on 0 tai 6.

13. Mikä on luvun $A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 2016$ jakojäännös jaettaessa luvulla 5?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Ratkaisu. Luvut a ja $a + 5$ saavat aina saman jakojäännöksen jaettaessa luvulla 5. Siis luvun A jakojäännös luvun 5 kanssa on sama kuin luvun

$$1 + 2 + 3 + 4 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 0 + 1.$$

Koska $1 + 2 + 3 + 4 + 0 = 10$ eli jaollinen viidellä, niin voidaan jakaa summa

$$1 + 2 + 3 + 4 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 0 + 1$$

viidellä jaollisiin pätkiin

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 0) + (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 0) + 1.$$

Tästä nähdään, että luvun A jakojäännös jaettaessa luvulla 5 on 1.

14. Potenssi tarkoittaa, että luku kerrotaan itsellään niin monta kertaa kuin yläkulmassa oleva luku kertoo. Esimerkiksi siis $5^2 = 5 \cdot 5$ ja $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$. Mikä on oikea suuruusjärjestys?

a) $5^{10} \cdot 3^{10} < 4^{20} < 2^{41}$ **b)** $2^{41} < 4^{20} < 5^{10} \cdot 3^{10}$ **c)** $5^{10} \cdot 3^{10} < 2^{41} < 4^{20}$
d) $4^{20} < 5^{10} \cdot 3^{10} < 2^{41}$ **e)** $4^{20} < 2^{41} < 5^{10} \cdot 3^{10}$

Ratkaisu. Aloitetaan toteamalla, että $4^{20} = (2 \cdot 2)^{20} = 2^{20} \cdot 2^{20} = 2^{40} < 2^{41}$, mikä osoittaa a)-kohdan jälkimmäisen epäyhtälön ja myös sulkee heti pois mahdollisuudet b), c) ja d).

Toisaalta, $5^{10} \cdot 3^{10} = (5 \cdot 3)^{10} = 15^{10}$, ja $4^{20} = 4^{10} \cdot 4^{10} = (4 \cdot 4)^{10} = 16^{10}$, eli $5^{10} < 4^{20}$. Tämä sulkee pois vaihtoehdon e), ja toisaalta todistaa a)-kohdan ensimmäisen epäyhtälön.

15. Mikä on tulon $9688072645684032 \cdot 125$ keskimmäinen numero?

$\boxed{\textbf{a)}\ 0}$ **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

Ratkaisu. Todetaan, että $125 = \frac{1}{8} \cdot 1000$ ja iso kertoja voidaan ryhmitellä osiin, joiden muodostamat luvut ovat kahdeksalla jaollisia

$$9688072645684032 = 96\,880\,72\,64\,56\,8\,40\,32.$$

Näin ollen kyseinen tulo on

$$12\,110\,09\,08\,07\,1\,05\,04\,000$$

Vastaus on siis 0.