Turun seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailu 22.1.2014 Ratkaisuita

1. Laske $3 \cdot 21 - 12 \cdot 3$.

a) 27 **b)** 28 **c)** 29 **d)** 30 **e)** 31

Ratkaisu. $3 \cdot 21 - 12 \cdot 3 = 63 - 36 = 27$.

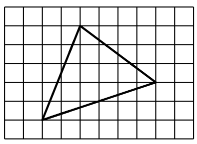
2. Peräkylän matematiikkakerholla on kaksi tapaa hankkia rahaa: Pullapussien ja laskutikkujen myyminen. Laskutikut maksavat seitsemän euroa, pullapussit viisi euroa. Hankintakuluja ei ole, sillä laskutikut ovat vanhaa jäämistöä ja pullat leivotaan itse. Kerhon taloudenhoitajan laskut ovat sekaisin, ja hän tietää vain, että kassassa on 37 euroa.

Mitä on myyty?

a) Tietojen perusteella ei voi määrittää.
b) Ainakin kahdeksan laskutikkua.
c) Korkeintaan kaksi pussia pullia.
d) Taloudenhoitaja on laskenut väärin ja kassassa ei voi olla 37 euroa.
e) Yksi laskutikku ja kuusi pussia pullaa.

Ratkaisu. Vaihtoehto e) on oikein: $7 + 5 \cdot 6 = 37$. Vaihtoehdot b), c) ja d) ovat selvästi väärin. Vaihtoehto a) on puolestaan väärin, sillä välittömästi voi päätellä, että ainakin yksi laskutikku on myyty; päättyyhän pelkästään pullista tullut tuotto aina joko nollaan tai vitoseen. Jos poistetaan kassasta laskutikun myynnistä saatu voitto, jää jäljelle 30 euroa. Koska $5 \cdot 7 = 35 > 30$, on myyty lisäksi korkeintaan neljä laskutikkua. Nyt voi testata läpi vaihtoehdot, joissa on myyty lisäksi $0, 1, 2, 3$ tai 4 laskutikkua. Ainoastaan vaihtoehto 0 laskutikkua on mahdollinen. Tällöin on yhteensä myyty yksi laskutikku ja kuusi pullapussia.

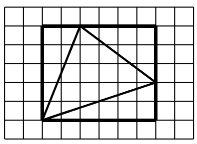
3. Ruutupaperille piirretään seuraavanlainen kolmio:



Kuinka monta ruutua on kolmion ala?

a) 11 **b)** 11,5 **c)** 12 **d)** 12,5 **e)** 13

Ratkaisu. Piirretään kolmion ympärille suorakaide ruutupaperin viivoja seuraillen:



Näin syntyy 5×6-suorakaide, jonka ala on $5 \cdot 6 = 30$ ruutua.

Lisäksi syntyy kolme uutta kolmiota. Vasemmassa ylänurkassa sijaitsevan kolmion ala on $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$ ruutua. Oikeassa ylänurkassa sijaitsevan kolmion $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ ruutua. Samassa hengessä oikeassa alanurkassa sijaitsevan kolmion ala on $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$ ruutua.

Lopuksi, kysytty kolmion ala on suorakaiteen ala josta vähennetään kolmen uuden kolmion alat, eli

$$30 - 5 - 6 - 6 = 30 - 17 = 13\,\text{ruutua}.$$

4. Kellon sekuntiviisarin pituus on 1 cm. Kuinka pitkän matkan sekuntiviisarin kärki liikkuu tunnissa? [Ympyrän kehä on π kertaa niin pitkä kuin sen halkaisija, ja luku π on suurin piirtein 3,14.]

a) 1,8 m **b)** 1,9 m **c)** 3,6 m **d)** 3,8 m **e)** 4,8 m

Ratkaisu. Minuutissa sekuntiviisarin kärki kulkee täyden ympyrän, jonka säde on mainittu viisarin pituus. Ympyrän halkaisija on kaksi kertaa viisarin pituus, eli 2 cm. Ympyrän kehän pituus on π kertaa tämä, ja tunnetusti π on noin 3,14. Siispä ympyrän kehän pituus on noin

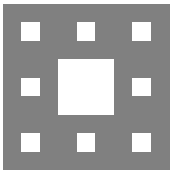
$$3{,}14 \cdot 2\,\text{cm} = 6{,}28\,\text{cm}.$$

Tunnissa kärki kulkee 60 kertaa tämän matkan, eli noin

$$60 \cdot 6{,}28\,\text{cm} = 376{,}80\,\text{cm},$$

eli noin 3,8 m.

5. Neliö, jonka koko on 9×9 senttimetriä jaettiin yhtä suuriin 3×3-alueisiin, joista keskimmäinen sahattiin pois. Jäljelle jääneistä 3×3-alueista kustakin sahattiin samalla tavalla niiden keskellä oleva 1×1-alue pois. Jäljelle jäi ohessa kuvatun muotoinen reikäinen alue.

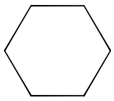


Mikä on tummien ja valkeiden alueiden välisten rajaviivojen yhteen laskettu pituus?

a) 43 cm **b)** 56 cm **c)** 68 cm **d)** 80 cm **e)** 92 cm

Ratkaisu. Ison 9×9-neliön reunan pituus on $4 \cdot 9 = 36$. Keskellä olevan 3×3-neliön reunan pituus on $4 \cdot 3 = 12$. Lopuksi kussakin kahdeksasta 1×1-neliöstä reunan pituus on $4 \cdot 1 = 4$. Näiden kaikkien ympärysmittojen summa on $36 + 12 + 8 \cdot 4 = 80$.

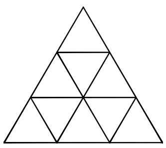
6. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 3, ja sen kustakin kärjestä leikataan pois sellaisen tasasivuisen kolmion, jonka sivun pituus on 1, muotoinen pala. Jäljelle jää siis seuraavan kuvion muotoinen alue:



Kuinka suuri osuus alkuperäisen kolmion alasta on jäljellä?

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{5}{6}$

Ratkaisu. Jaetaan alkuperäinen kolmio pieniksi tasasivuisiksi kolmioiksi, joista jokainen on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 1:



Nyt huomataan, että alkuperäisen kolmion ala oli yhdeksän pientä kolmiota, kun taas jäljelle jäävän alueen ala on kuusi pientä kolmiota. Siis alkuperäisestä alasta on jäljellä osuus $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

7. Mikä on luvun 1/41 desimaaliesityksessä 2014. pilkun jälkeinen numero?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 9

Ratkaisu. Laskemalla osamäärää $\frac{1}{41}$ jakokulmalla saadaan

$$0{,}0243902\ldots$$

Koska jakokulman laskemisessa jokainen uusi desimaali riippuu vain kahdesta edellisestä, näemme, että desimaalit toistavat itseään viiden jaksoissa. Erityisesti, desimaalipilkun jälkeen joka viides desimaali on 9. Täten 2010. desimaali on 9, minkä jälkeen 2011. desimaali on 0, 2012. desimaali on 2, 2013. desimaali on 4, ja lopuksi kysytty 2014. desimaali on 3.

8. Laske

$$-1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 - \cdots - 47 \cdot 48 + 48 \cdot 49.$$

a) 0 **b)** 50 **c)** 1200 **d)** 5350 **e)** 10000

Ratkaisu. Ryhmitellään ensin termejä ja sievennetään:

$$\begin{aligned}
&-1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 - + \cdots - 47 \cdot 48 + 48 \cdot 49 \\
&\quad = (3-1) \cdot 2 + (5-3) \cdot 4 + (7-5) \cdot 6 + \cdots + (49-47) \cdot 48 \\
&\quad = 2\,(2 + 4 + 6 + \cdot + 48) = 2 \cdot 2\,(1 + 2 + \cdots + 24)\,.
\end{aligned}$$

Lasketaan nyt suluissa oleva lauseke. Yhdistetään ensimmäinen ja viimeinen termi (1 ja 24), toiseksi ensimmäinen ja toiseksi viimeinen (2 ja 23), jne, ja saadaan:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot 2\,(1 + 2 + \cdots + 24) \\
&\quad = 2 \cdot 2\,\big((1+24) + (2+23) + (3+22) + \cdots + (12+13)\big) \\
&\quad = 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 25 = 1200.
\end{aligned}$$

Huomautus: Tehtävää ei tarvitse ratkaista näin perusteellisesti, vaan alkeellisemmilla arvioillakin pystyy karsimaan väärät vaihtoehdot pois. Mikäli ensin saa aikaiseksi lausekkeen $2 \cdot 2\,(1 + 2 + \cdots + 24)$, voi sitä helposti arvioida:

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 24 < 2 \cdot 2\,(1 + 2 + \cdots + 24) < 2 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 24 < 2 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 25 = 2500,$$

jolloin ainoaksi vaihtoehdoksi jää vaihtoehto c).

9. Positiiviselle luvulle x pätee

$$\big((x^2+1)^2+1\big)^2 + 1 = 26.$$

Mikä luku x on?

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** 1 **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** 2

Ratkaisu. Sievennämme yhtälöä järjestelmällisesti. Ensinnäkin

$$\big((x^2+1)^2+1\big)^2 = 25.$$

Tästä seuraa, että

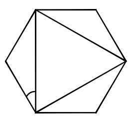
$$\big(x^2+1\big)^2 + 1 = 5, \quad \text{eli} \quad \big(x^2+1\big)^2 = 4.$$

Samassa hengessä

$$x^2 + 1 = 2, \quad \text{eli} \quad x^2 = 1.$$

Lopuksi, tästä seuraa, että $x = 1$.

10. Seuraavassa kuvassa on säännöllinen kuusikulmio, jonka sisälle on piirretty tasasivuinen kolmio.



Kuinka suuri on kuvaan merkitty kulma?

a) 20° **b)** 25° **c)** 30° **d)** 35° **e)** 40°

Ratkaisu. Kuviossa on neljä kolmiota, ja jokaisen niistä kulmien summa on 180°. Kuvan kuusikulmion kulmien summa on kuvan neljän kolmion kulmien summien summa, eli $4 \cdot 180°$. Kuusikulmion yksi kulma on siis kuudesosa tästä, eli

$$\frac{4 \cdot 180°}{6} = 4 \cdot 30° = 120°.$$

Kuvaan merkitty kulma on siis sellaisen tasakylkisen kolmion, jonka huippukulma on 120°, kantakulma. Merkitty kulma on siis

$$\frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

11. Molvaniassa on hieman outo rahalaitos. Käytössä on vain 5 dinaarin ja 4 dinaarin seteleitä. Lisäksi maan ikivanha perinne kieltää vaihtorahojen antamisen. Tästä syystä esimerkiksi 2 tai 6 dinaarin hintaa ei voi maksaa lainkaan. Mikä on suurin (kokonaisluku)hinta dinaareissa, jota ei voi maksaa, vaikka lompakosta löytyisi seteleitä kuinka paljon?

a) 7 **b)** 9 **c)** 11 **d)** 13 **e)** 15

Ratkaisu. Yhdellä setelillä voi maksaa vain hinnat 4 ja 5. Kahdella setelillä voi maksaa hinnat

$$4+4=8, \quad 4+5=9 \quad \text{ja} \quad 5+5=10.$$

Kolmella setelillä voi maksaa hinnat

$$4+4+4=12, \quad 4+4+5=13, \quad 4+5+5=14, \quad \text{ja} \quad 5+5+5=15.$$

Erityisesti, seteleillä ei voi maksaa hintaa 11, koska vähintään kolmella setelillä voi maksaa vain vähintään $4+4+4=12$ dinaarin suuruisia summia.

Jatkamalla aiempia laskuja, neljällä setelillä voi maksaa $4+4+4+4=16$ dinaarin hinnan, ja korvaamalla tässä nelosia yksitellen viitosilla saadaan maksettua kaikki hinnat 16, 17, 18, 19 ja 20. On helppo vakuuttua siitä, että tästä eteen päin kaikki hinnat voi maksaa; esim. neljän dinaarin seteleillä voi maksaa kaikki hinnat 20, 24, 28, $\ldots$, ja koska seteleitä on tässä vähintään viisi, voi näihin hintoihin lisätä 1, 2 tai 3 dinaaria korvaamalla sopiva määrä neljän dinaarin seteleitä viiden dinaarin seteleillä.

Vastaus on siis 11.

12. Pyhässä kaupungissa on viisi temppeliä, joista kukin on omistettu yhden jumalan palvelemiseen. Kaupunkiin saapuu pyhiinvaeltaja, joka haluaa kunnioittaa kaikkia viittä jumalaa antamalla kullekin uhrilahjaksi suitsuketta. Kunkin temppelin portilla on ylipappi, joka siunaa tulijoiden lahjat. Koska pyhiinvaeltajamme oli hurskas, ylipapin siunaus aina kaksinkertaisti hänen mukanaan olevan suitsukkeen määrän. Vierailtuaan kerran kaikissa temppeleissä, ja saatuaan jokaisessa niistä ylipapin siunauksen pyhiinvaeltajalle, hän oli jättänyt jokaiselle jumalista täyden maljallisen suitsuketta, eikä hänelle jäänyt yhtään yli. Montako maljallista pyhiinvaeltajalla oli alunperin mukanaan?

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{7}{8}$ **c)** $\frac{15}{16}$ **d)** $\frac{31}{32}$ **e)** $\frac{63}{64}$

Ratkaisu. Oletetaan, että pyhiinvaeltajalla oli aluksi x maljallista suitsuketta mukanaan. Käydessään ensimmäisessä temppelissä, suitsukkeen määrä kaksinkertaistui ja sitten väheni yhdellä, eli ensimmäisen vierailun jälkeen suitsuketta oli $2x-1$ maljallista. Vastaavasti toisen temppelin jälkeen suitsuketta oli $2(2x-1)-1$ maljallista, ja kolmannen temppelin jälkeen suitsuketta oli $2(2(2x-1)-1)-1$ maljallista. Samassa hengessä suitsuketta oli neljännen temppelin jälkeen $2(2(2(2x-1)-1)-1)-1$ ja viidennen jälkeen $2(2(2(2(2x-1)-1)-1)-1)-1$ maljallista.

Tiedetään siis, että

$$2(2(2(2(2x-1)-1)-1)-1)-1=0.$$

Tästä seuraa, että

$$2(2(2(2x-1)-1)-1)-1=\frac{1}{2},$$

ja edelleen, että

$$2(2(2x-1)-1)-1=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4},$$

ja edelleen, että

$$2(2x-1)-1=\frac{\frac{3}{4}+1}{2}=\frac{7}{8},$$

ja samassa hengessä, että

$$2x-1=\frac{\frac{7}{8}+1}{2}=\frac{15}{16},$$

ja lopuksi, että

$$x=\frac{\frac{15}{16}+1}{2}=\frac{31}{32}.$$

13. Lapsi kävelee käytävää, jonka lattia on laatoitettu isoilla laatoilla. Hän välttää astumasta laattojen saumojen päälle ja voi aina joko astua laatalta seuraavalle tai hypätä seuraavan laatan yli. Kun käytävän pituus on 10 laattaa ja lapsi aloittaa ensimmäiseltä laatalta, monellako eri tavalla hän voi valita laatat joille astuu?

a) 34 **b)** 55 **c)** 89 **d)** 512 **e)** 1024

Ratkaisu. Tarkastellaan yleisempää n. laatan tapausta ($n = 1, 2, \ldots$), ja merkitään vastausta L_n. Jos $n = 1$, laattoja on vain yksi, ja lapsukainen on jo sillä, eli $L_1 = 1$. Jos $n = 2$, lapsukainen voi joko hypätä seuraavalle laatalle, tai hypätä sen yli. Muita vaihtoehtoja ei ole, ja siten $L_2 = 2$.

Olkoon seuraavaksi $n \geqslant 3$. Lapsi voi hypätä ensimmäiseltä laatalta toiselle tai kolmannelle. Jos hän hyppää toiselle laatalle, hän on tilanteessa, jossa hänellä on L_{n-1} eri tapaa valita loput laata. Jos hän taas hyppää kolmannelle laatalle, niin hänellä on L_{n-2} tapaa valita loput laatat. Siispä

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$$

Nyt on helppo laskea kysytty L_{10}:

$$\begin{aligned}
L_1 &= 1, \\
L_2 &= 2, \\
L_3 &= L_2 + L_1 = 3, \\
L_4 &= L_3 + L_2 = 3 + 2 = 5, \\
L_5 &= L_4 + L_3 = 5 + 3 = 8, \\
L_6 &= L_5 + L_4 = 8 + 5 = 13, \\
L_7 &= L_6 + L_5 = 13 + 8 = 21, \\
L_8 &= L_7 + L_6 = 21 + 13 = 34, \\
L_9 &= L_8 + L_7 = 44 + 21 = 55, \\
L_{10} &= L_9 + L_8 = 65 + 44 = 89.
\end{aligned}$$