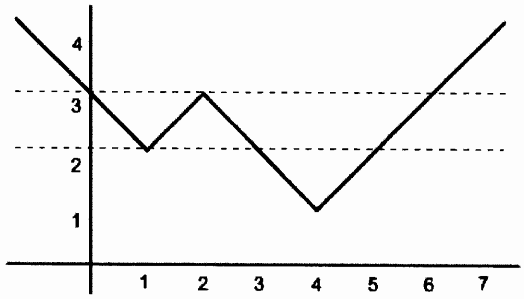
Pythagoraan polku 20.4.2013

1. Millä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvoilla yhtälöllä $|x-1|-|x-2|+|x-4|=a$ on täsmälleen 3 ratkaisua?

Ratkaisu. Tarkastellaan funktiota $f(x)=|x-1|-|x-2|+|x-4|$. Poistamalla itseisarvot lukusoran eri alueissa, saadaan funktion lausekkeeksi

$$f(x)=\begin{cases} 3-x, \text{kun } x<1 \\ x+1, \text{kun } 1 \le x \le 2 \\ -x+6, \text{ kun} 2<x<4 \\ x-3, \text{ kun } x \ge 4 \end{cases}$$



Yhtälöllä $f(x)=a$ on tasan kolme ratkaisua, jos $a=2$ tai $a=3$.

2. Puolisuunnikkaan sivut ovat 3, 3, 3 ja k, missä k on kokonaisluku. Määritä puolisuunnikkaan suurin mahdollinen pinta-ala.

Ratkaisu Mahdollisia k:n arvoja ovat 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8. Helposti nähdään, että puollisuunnikkailla, joissa $k=1$ ja $k=5$ on sama korkeus, samoin kun $k=2$ ja $k=4$. Kummassakin tapauksessa suurempi k:n arvo antaa suuremman alan. Jos $k>3$, niin puolisuunnikkaan korkeus on $h_k=\sqrt{9-\frac{(k-3)^2}{4}}$ ja ala $A_k=h_k\cdot\frac{k+3}{2}$. Lasketaan tästä A_k, kun $k=$ 3, 4, 5, 6, 7 ja 8. Saadaan $A_3=\frac{\sqrt{1296}}{4}$, $A_4=\frac{\sqrt{1715}}{4}$, $A_5=\frac{\sqrt{2048}}{4}$, $A_6=\frac{\sqrt{2187}}{4}$, $A_7=\frac{\sqrt{2000}}{4}$ ja $A_8=\frac{\sqrt{1331}}{4}$. Suurin ala saadaan, kun $k=6$.

3. Kuinka moni positiivinen kokonaisluku ei ole kirjoitettavissa muotoon $100m+3n$, missä m ja n ovat luonnollisia lukuja?

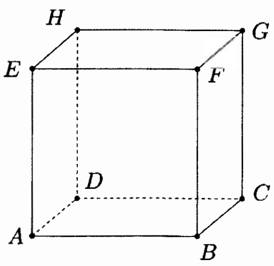
Ratkaisu. Selvitetään, mitkä luvut voi kirjoittaa näin. Ensinnäkin kaikki 3:lla jaolliset. Koska $100=3\cdot 33+1$, niin jos k $=3t+1$ ja $t\ge 33$, niin $k=3\cdot(t-33)+3\cdot 33+1=100+3n$. Edelleen, $200=3\cdot 66+2$, joten jos $=3t+2$ ja $t\ge 66$, niin $k=3(t-66)+3\cdot 66+2=200+3n$. Ainoat luvut, joita ei voi kirjoittaa haluttuun muotoon, ovat 1, 2, 4, 5, …, 97, 98, 101, 104, …, 194, 197. Näitä on 99 kappaletta.

4. Romeo ja Julia heittävät noppaa vuorotellen. Aina, kun heittäjää saa kuutosen, hän saa pisteen. Onnekas Romeo saa aina viidestä heitostaan yhden pisteen, mutta Julia saa pisteen aina kuudesta

heitosta. Pelin voittaa se, joka saa ensin neljä pistettä. a) Osoita, että Romeo voi voittaa. b) Osoita, että Julia voi voittaa.

Ratkaisu a) Ilmeinen: peli voi mennä näin:
Romeo: 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0,1;
Julia: 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0,
ja Romeo voittaa 16. kierroksen kohdalla.
b) Peli voi mennä myös näin:
Romeo: 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0;
Julia: 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
ja Julia voittaa 19. kierroksen kohdalla.

5. Kuution ABCDEFGH särmän pituus on a. Määritä kolmion EDC korkeusjanojen pituudet.



Ratkaisu. Kolmio EDC on suorakulmainen, joten sen kaksi korkeusjanaa ovat $DC = a$ ja $ED = a\sqrt{2}$. Lisäksi $EC = a\sqrt{3}$. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan helposti kolmannelle korkeusjanalle x ehto $x : a = (a\sqrt{2}) : (a\sqrt{3})$, joten $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

6. Osoita, että luku $2013^{2014} - 2013$ on jaollinen luvulla $2013^2 + 2014$.

Ratkaisu Tunnetusti $x^{2013} - 1 = (x^3)^{671} - 1 = (x^3 - 1)(x^{2010} + x^{2007} + \cdots + 1)$ ja $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Polynomi $x(x^{2013} - 1)$ on siis jaollinen polynomilla $x^2 + x + 1$. Kun sijoitetaan $x = 2013$, saadaan väite.

7. Etsi kaikki ei-negatiiviset kokonaislukuparit (x,y), joille $y^2(x + 1) = 1576 + x^2$.

Ratkaisu. Muokataan yhtälöä

$$y^2(x + 1) = 1576 + x^2 \Leftrightarrow y^2(x + 1) = 1577 + x^2 - 1 = 1577 + (x+1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)[\, y^2 - x + 1] = 1577 = 19 \cdot 83.$$

Siis x+1 on luvun 1577 positiivinen tekijä.

Jos x+1=1, niin x=0 ja $y^2 = 1576$ eikä kokonaislukuratkaisuja löydy. Jos Jos x+1=19, niin x=18 ja $y^2 = 100$, jolloin y=10. Jos x+1= 83, niin x=82 ja $y^2 = 100$, jolloin y=10. Jos x+1=1577, niin x=1576 ja $y^2 = 1576$ ja kokonaislukuratkaisuja ei löydy.

Siis ei-negatiiviset kokonaislukuratkaisut ovat (x=18, y=10) ja (x=82 , y=10).

8. Tarkastellaan polynomiyhtälöä $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$, missä a ja b ovat kokonaislukuja. Etsi kaikki mahdolliset ei-negatiiviset kokonaisluvut r, joille sekä r että $-r$ ovat jonkin tällaisen yhtälön ratkaisuja.

Ratkaisu. Koska r ja –r ovat ratkaisuja, niin saadaan yhtälöpari $\begin{cases} r^3 + ar^2 + br + 6 = 0 \\ -r^3 + ar^2 - br + 6 = 0 \end{cases}$.
Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $2ar^2 + 12 = 0$ eli $ar^2 + 6 = 0$. Vähentämällä yhtälöt saadaan $2r^3 + 2br = 0$. Koska $r = 0$ ei ole yhtälön ratkaisu, niin välttämättä $r^2 + b = 0$ eli $b = -r^2 < 0$. Koska toisaalta $(-r^2) = 6$ saadaan, $ab = 6$. Siis $b = -1, -2, -3$ tai -6, joten $r = \sqrt{-b} = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ tai $\sqrt{6}$.

Kääntäen, jos $r = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ tai $\sqrt{6}$, voidaan määritellä $b = -r^2$ *ja* $a = \frac{6}{b}$. Tällöin a ja b ovat kokonaislukuja ja $b + r^2 = 0$ sekä $ar^2 + 6 = ar^2 + ab = a(b + r^2)$.

Koska $x^3 + ax^2 + bx + 6 = x(x^2 + b) + ax^2 + 6$, niin r ja $-r$ ovat polynomin nollakohtia.

9. Tarkastellaan yhtälöä $x^{10} + ax + 1 = 0$. Etsi kaikki reaaliluvut a, joille on voimassa: Jos r on yhtälön ratkaisu, niin myös $1/r$ on ratkaisu.

Ratkaisu. Koska r ja $1/r$ ovat annetun polynomin nollakohtia $r^{10} + ar + 1 = 0$ ja $(1/r)^{10} + a(1/r) + 1 = 0$. $a \neq 0$, sillä $r^{10} + 1 \neq 0$. Kertomalla jälkimmäistä yhtälöä puolittain luvulla $r^{10} \neq 0$ saadaan yhtälö $1 + ar^9 + r^{10} = 0$.

Yhdistämällä yhtälöt saadaan $ar = -(r^{10} + 1) = ar^9$. Yhtälön $ar(1 - r^8) = 0$ ratkaisuista vain $r = 1$ tai $r = -1$ kelpaavat. Vastaavat luvun a arvot ovat $a = -2$ ja $= 2$.

10. Tarkastellaan lukujonoa $x_1 = 34, x_2 = 334, x_3 = 3334, \ldots, x_n = \underbrace{33\cdots33}_{n\ kpl}4, \ldots$. Kuinka monta numeroa 3 on luvun $9(x_n)^3$ kymmenjärjestelmäesityksessä?

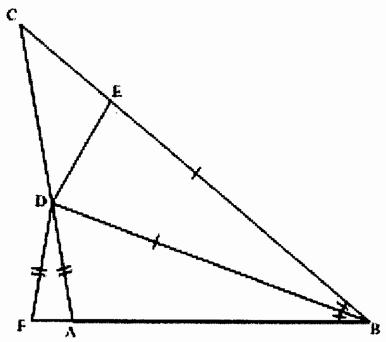
Ratkaisu. Koska $x_n - 1 = \underbrace{33\ldots333}_{n+1\ \mathrm{kpl}}$, niin $x_n - 1 = (10^{n+1} - 1)/3$ eli$x_n = \frac{10^{n+1}+2}{3}$.

Siis $9(x_n)^3 = 9\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}(10^{n+1} + 2)^3 = \frac{1}{3}\left(10^{3(n+1)} + 6 \cdot 10^{2(n+1)} + 12 \cdot 10^{n+1} + 8\right) =$ $\frac{10^{3(n+1)}-1}{3} + 2 \cdot 10^{2(n+1)} + 4 \cdot 10^{n+1} + 3.$

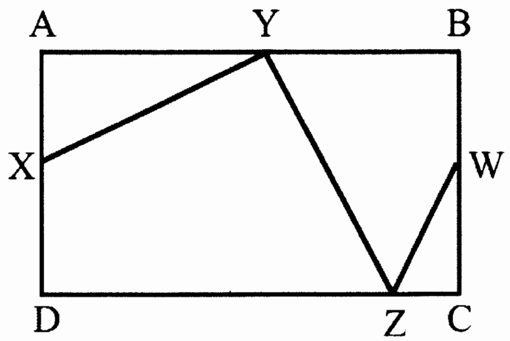
Luvun $\frac{10^{3(n+1)}-1}{3}$ kaikki 3(n+1) numeroa ovat kolmosia. Näistä kolme muuta summattavaa muuttavat kukin yhden numeron. Luvussa $9(x_n)^3 = \underbrace{33\cdots3}_{n \text{ kpl}}5\underbrace{33\cdots3}_{n \text{ kpl}}7\underbrace{33\cdots3}_{n \text{ kpl}}6$ on siten 3n kolmosta.

11. Kolmiolle ABC on voimassa $AB = AC$ ja $\angle BAC = 100°$. Olkoon D kulman B puolittajan ja sivun AC leikkauspiste. Osoita, että $BC = BD + DA$.

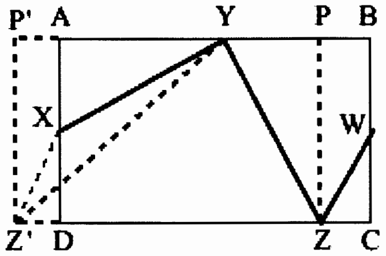
Ratkaisu. Olkoon E sivun BC piste, jolle BE=BD, ja olkoon F pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran piste, jolle DF=DA ja A≠F. Koska AB=AC, niin $\angle ABC = \angle BCA = 40°$. Koska BD on kulmanpuolittaja, niin $\angle ABD = \angle DBE = 20°$. Koska BE=BD kolmio DBE on tasakylkinen ja $\angle DEB = 80°$. Tällöin $\angle DEC = 100°$ ja kolmion DCE kulmat ovat $100°, 40°$ ja $40°$ ja DE=EC. Kolmio ADF on tasakylkinen (AD=DF) ja ∠FAD=80° (∠CAB=100°). Kolmion FAD kulmat ovat 80°, 20°,80°, joten kolmiot FBD ja DEB ovat yhtenevät (samat kulmat ja yhteinen sivu), joten DF=DE. Nyt DA=DF=DE=EC ja BC=BE+EC=BE+AD=BD+DA.

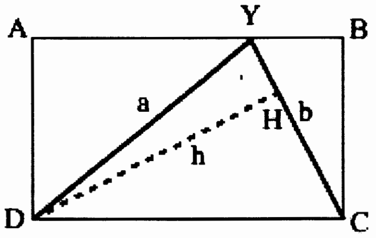


12. Murtoviiva $\overline{XYZW}$ on piirretty kuvan mukaisesti suorakulmion $ABCD$ sisään. Murtoviivan $\overline{XYZW}$ pituus on korkeintaan 2 pituusyksikköä ja $XD = WC$. Osoita, että suorakulmion $ABCD$ ala on korkeintaan 1.



Ratkaisu





Piirretään kuvan mukainen suoraklulmio P'PZZ', jolla on sama pinta-ala kuin suorakulmiolla ABCD. Koska XD=WC, niin Z'X=ZW ja murtoviivoilla Z'XYZ ja XYZW on sama pituus. Kun murtoviiva Z'XY korvataan janalla Z'Y, pätee Z'X+XY≥Z'Y.

Tarkastellaan saatua yksinkertaisempaa tapausta. Kuvan merkinnöin a+b=DY+YC ≤ 2. Näytetään, että suorakulmion ABCD ala on korkeintaan 1. Olkoon DH kolmion DYC korkeusjana ja h sen pituus.

Nelikulmion ABCD ala on DC×DA ja kolmion DYC ala on ½ (DC×DA) = ½(DH×YC). Siis suorakulmion ABCD ala on hb. Koska h≤a, niin nelikulmion ala on korkeintaan ab. Mutta nyt $ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2) \le \frac{1}{4}(a+b)^2 \le \frac{1}{4}\cdot 2^2 = 1$.

13. Etsi kokonaisluvut $n \ge 2$, joille $(n-1)!$ ei ole luvun n monikerta.

Ratkaisu. Heti nähdään, että 3!=6 ei ole luvun 4 monikerta. Lisäksi mikäli n on alkuluku, mikään luvun (n-1)! tekijöistä ei ole jaollinen luvulla n. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole.

Olkoon $n \ne 4$ yhdistetty luku. Olkoon p luvun n alkulukutekijä, jolloin voidaan kirjoittaa n=pm. Koska n ei ole alkuluku, niin p<n ja p on luvun (n-1)! tekijä. Jos $p \ne m$, sekä p että m ovat luvun (n-1)! tekijöitä ja n=pm on luvun (n-1)! tekijä. Jos p=m, niin $n=p^2$. Koska $n \ne 4$, niin p>2 ja 2p<n ja sekä p että 2p ovat erisuuria luvun (n-1)! tekijöitä. Siis (n-1)! on jaollinen luvulla $p(2p) = 2p^2 = 2n$ ja siten myös luvulla n.

14. Etsi suurin kokonaisluku n, jolle luvuissa n ja $2n$ ei ole toistuvia numeroita eikä luvuissa n ja$2n$ ole yhteisiä numeroita. Esimerkiksi luvussa $n = 536$ mikään numero ei toistu ja myöskään luvussa $2n = 1072$ ei ole toistuvia numeroita. Lisäksi luvuissa n ja $2n$ ei ole yhteisiä numeroita.

Ratkaisu. Suurin etsitty luku on n = 48651, jolloin 2n = 97302. Oletetaan, että on olemassa ehdot täyttävä luku m > n. Koska luvussa m on vähintään 5 numeroa ja käytössä on korkeintaan 10 numeroa, luvussa 2m voi olla korkeintaan 5 numeroa. Koska 2m > 2n, on luvun 2m ensimmäinen numero välttämättä 9 ja siten luvun m ensimmäinen numero on 4. Luvun 2m toinen numero ei voi olla 9. Myös 8 on mahdoton, sillä muuten luvun m toisen numeron olisi oltava 9 ja numerot eivät saa toistua. Siis luvun 2m toinen numero on 7. Koska 2m= 97···, niin välttämättä m=48···. Koska numerot 9,8 ja 7 on käytetty ja luvun n<m kolmas numero on 6, myös luvun m kolmas numero on 6. Vastaavasti luvun m neljänneksi numeroksi saadaan 5. Jäljellä ovat numerot 0,1,2 ja 3. Koska m>n, niin luvun m viimeinen numero on joko 2 tai 3. Tällöin luvun 2m viimeinen numero on joko 4 tai 6, mikä on mahdotonta sillä numerot eivät voi toistua. Siis lukua m ei ole olemassa ja n=48651 on suurin etsitty luku.

15. Äärettömän lukujonon $f_1, f_2, f_3, \ldots$ termit toteuttavat ehdon $f_{\frac{x+y}{3}} = \frac{f_x+f_y}{2}$, kun x, y ja $\frac{x+y}{3}$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Kuinka monta erillistä arvoa jonon termeissä esiintyy?

Ratkaisu Osoitetaan, että jonon kaikki termit ovat yhtä suuret. Olkoon x positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$f_x = f_{\frac{x+2x}{3}} = \frac{f_x + f_{2x}}{2}$$

josta voidaan ratkaista $f_{2x} = f_x$. Toistamalla saadaan $f_{8x} = f_{2\cdot 4x} = f_{4x} = f_{2\cdot 2x} = f_{2x} = f_x$.

Edelleen $f_{3x} = f_{\frac{x+8x}{3}} = \frac{f_x+f_{8x}}{2} = \frac{f_x+f_x}{2} = f_x$. Sijoittamalla x=1 saadaan $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$. Todistetaan induktiolla, että $f_n = f_1$ kaikilla n=1,2,3,…. Edellä on jo todistettu, että $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$. Oletetaan, että $f_n = f_1$, jollakin $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan ,että $f_{n+1} = f_1$. Nyt

$$f_{n+1} = f_{\frac{3n+3}{3}} = \frac{f_{3n} + f_3}{2} = \frac{f_n + f_3}{2} = \frac{f_{n1} + f_1}{2} = f_1.$$

Induktioperiaatteen nojalla $f_n = f_1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

16. Olkoot *a, b* ja *c* reaalilukuja siten, että yhtälön $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kaikki ratkaisut ovat reaalisia. Osoita, että tällöin yhtälöllä ei ole lukua $\frac{2\sqrt{a^2-3b}-a}{3}$ suurempia ratkaisuja.

Ratkaisu. Olkoot $p \geq q \geq r$ yhtälön $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ reaaliset ratkaisut. Kun polynomi jaetaan tekijöihin suurimman nollakohdan avulla, saadaan

$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - p)\big(x^2 + (p + a)x + (p^2 + ap + b)\big) = 0$. Syntyneen toisen asteen tekijäpolynomin nollakohtien tulee olla reaalisia, joten diskriminantista saadaan ehto

$(p + a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p^2 + ap + b) \geq 0$, josta ratkaistaan $p \leq \frac{2\sqrt{a^2-3b}-a}{3}$.

17. Kuinka monella tavalla 8x8 ruudukkoon voidaan sijoittaa pelinappuloita siten, että jokaisella vaaka- ja pystyrivillä on pariton määrä nappuloita. Yhteen ruutuun voi laittaa korkeintaan yhden nappulan.

Ratkaisu. Ruudukon vasemmasta yläkulmasta alkavaan 7x7 ruudukkoon voidaan sijoittaa pelinappuloita 2^{49} tavalla. Jos ruudukon 1. rivillä on parillinen määrä nappuloita, on rivin 8. sarakkeeseen lisättävä nappula. Vastaavasti lisätään tarvittaessa nappula rivien 2-7 sarakkeeseen 8, jos rivillä on parillinen määrä nappuloita sarakkeissa 1-7. Vastaavasti täydennetään sarakkeiden 1-7 kahdeksas rivi. Tarkastellaan sitten oikeassa alakulmassa olevaa ruutua. Jos 8. sarakkeessa on parillinen määrä nappuloita, laitetaan ruutuun nappula. Tällöin 7x7 ruudukossa on pariton määrä nappuloita ja siten parittomassa määrässä sarakkeita on pariton ja parillisessa määrässä sarakkeita parillinen määrä nappuloita. Näin ollen 7 ensimmäisen sarakkeen 8. rivillä on parillinen määrä nappuloita ja alanurkkaan tarvitaan nappula.

Vastaavasti päätellään, että jos 8. sarakkeessa on pariton määrä nappuloita, 8. rivillä on myös pariton määrä nappuloita ja oikea alanurkka jää tyhjäksi. Koska 7x7 ruudukon nappulat valittiin vapaasti ja loput määräytyivät näiden perusteella yksikäsitteisesti, on haettujen tapojen määrä 2^{49}.

18. Laske integraalin $I_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin nx}{sinx}\right)^2 dx$ arvo, kun $n = 1,2,3,\ldots$.

Ratkaisu Osoitetaan, että $I_n = n\pi, n = 1,2,3,\ldots$. Kun $n \geq 2$,

niin $D_n = I_n - I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{\sin^2 nx - \sin^2(n-1)x}{\sin^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{(\sin nx - \sin(n-1)x)(\sin nx + \sin(n-1)x)}{\sin^2 x} dx =$

$\int_0^\pi \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos(nx-\frac{x}{2})2\sin(nx-\frac{x}{2})\cos\frac{x}{2}}{\sin^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin x \sin(2n-1)x}{\sin^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx.$

Merkitään $D_n = J_{2n-1}, n \geq 2$, missä $J_m = \int_0^\pi \frac{\sin mx}{\sin x} dx$, missä m=0,1,2,...

Kun $m \geq 2$ on voimassa

$$J_m - J_{m-2} = \int_0^\pi \frac{\sin mx - \sin(m-2)x}{\sin x} dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{2\sin x \cos(m-1)x}{\sin x} dx = 2\int_0^\pi \cos(m-1)x \, dx = \Big/_0^\pi \frac{2\sin(m-1)x}{m-1} = 0.$$

Siis $J_m = J_{m-2} = J_{m-4} = \cdots = \begin{cases} J_0 = 0, \text{jos } m \text{ on parillinen} \\ J_1 = \pi, \text{jos } m \text{ on pariton.} \end{cases}$

Siis $D_n = \pi$ ja koska $I_1 = \pi$, saadaan $I_n = n\pi$.

19. Olkoon $a > 0$ ja $f(x)$ välillä $[0, a]$ määritelty jatkuva funktio, jolle on voimassa $f(x)f(a - x) = 1$.

i) Anna esimerkki funktiosta f.

ii) Todista, että funktioita f on ääretön määrä.

iii) Laske $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$.

Ratkaisu. i) Esimerkiksi funktio $f(x) = e^{x-\frac{a}{2}}$ on kaikkialla jatkuva ja $f(x)f(a-x) = \left(e^{x-\frac{a}{2}}\right)\left(e^{a-x-\frac{a}{2}}\right) = e^0 = 1$.

ii) Funktiot $f(x)^n$ toteuttavat tehtävän vaatimukset, jos *f(x)* ne toteuttaa.

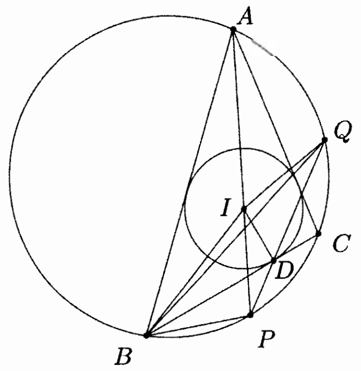
iii) Merkitään *x*=*a*-*y*, jolloin

$$I = \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-\mathrm{d}y}{1+f(a-y)} = \int_0^a \frac{\mathrm{f(y)d}y}{f(y)+1} = \int_0^a 1 - \frac{1}{f(y)+1}dy = a - \int_0^a \frac{\mathrm{d}y}{f(y)+1} = a - I,$$

josta saadaan $I = \frac{a}{2}$.

20. Kolmion ABC sisään pirretyn ympyrän keskipiste on I ja säde r. Kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä P. Sisään piirrety ympyrä sivuaa kolmion sivua BC pisteessä D ja suora PD leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä Q. Osoita, että jos $PD = r$, niin $PI = QI$.

Ratkaisu



Kolmion vieruskulman suuruutta, sitä, että AP puolittaa kulman $\angle BCA$, ja kehäkulmalausetta käyttäen nähdään, että $\angle BIP = \angle ABI + \angle IAB = \angle CBI + \angle PAC = \angle CBI + \angle CBP = \angle IBP$. Kolmio PBI on siis tasakylkinen, $PB = PI$. Kolmioissa BPD ja QPB on yhteinen kulma kärjessä P ja $\angle PBC = \angle PAC = \angle PAB = \angle PQB$. Kolmiot BPD ja QPB ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis $\frac{PD}{PB} = \frac{PB}{PQ}$, ja koska $PB = PI$, niin $\frac{PD}{PI} = \frac{PI}{PQ}$. Tästä seuraa, että kolmiot DPI ja IPQ ovat yhdenmuotoiset. Oletuksen mukaan $PD = r = ID$, joten edellinen kolmio on tasakylkinen. Siten myös jälkimmäinen kolmio on tasakylkinen, ja väite on todistettu.