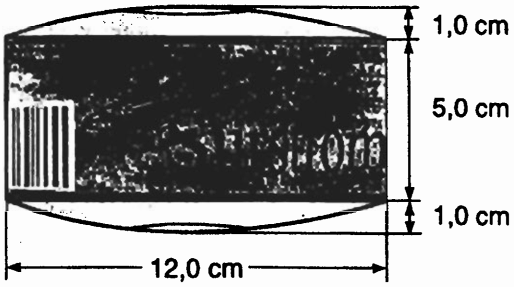
Pythagoraan polku 21.4.2012

Ratkaiskaa jokainen tehtävä omalle paperilleen ja merkitkää joka paperiin tehtävän numero ja joukkueenne tunnus (tai koulun nimi).

Tehtävät 1-9 ovat ruotsalaisia, saksalaisia, virolaisia ja suomalaisia (päättö)koetehtäviä.

1. Eräänä kauniina kevätiltana hapansilakanystävä Anders aikoo nauttia edellisenä kesänä ostamansa hapansilakkapurkin sisällön. Talven aikana purkin kansi ja pohja ovat pullistuneet ulos sisällön käydessä. Alun perin purkki oli suoran ympyrälieriön muotoinen ja sen halkaisija oli 12,0 cm ja korkeus 5,0cm. Nyt purkki on alla olevassa kuvassa esitetyn kappaleen muotoinen.

   Anders havaitsee, että kannen ja pohjan profiilia voidaan kuvata melko tarkasti muotoa $y = ax^2 + bx + c$ olevalla toisen asteen funktiolla. Laske tilavuudenlisäys prosentteina, kun purkki on turvonnut keskikohdasta ylöspäin 1,0 cm, mutta purkin halkaisija ja reunan korkeus ovat pysyneet muuttumattomina.

   [Nationellt prov kurs E 1997, Ruotsi]

2. Funktiot f ja g ovat derivoituvia. Muodostetaan uusi funktio $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$. Funktioille f ja g on voimassa: $f(0) = 2$ ja $g(0) = 1$ lisäksi $f'(x) = g(x)$ ja $g'(x) = -f(x)$. Määritä $h'(x)$ ja osoita, että $h(x) = 5$ kaikilla x. [Nationellt prov kurs E 1998, Ruotsi]

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 3y = 0$, kun $y(0) = 5$. [Nationellt prov kurs E 1998, Ruotsi]

4. Kolmisivuisen pyramidin $OABC$ särmille OA ja OB asetetaan vastaavasti pisteet K ja L, jotka jakavat särmät kärjestä O alkaen suhteissa 1:3 ja 3:1. Missä suhteessa pisteiden CKL kautta kulkeva taso jakaa pyramidin tilavuuden? [Matemaatika riigieksam 2008, Viro]

5. Laskuvarjohyppääjän putoamisnopeus v (m/s) ennen varjon aukeamista saadaan karkeasti kaavalla

$$v(t) = 50 \cdot \frac{e^{0,4t} - 1}{e^{0,4t} + 1}, t \geq 0,$$

missä t on putoamisaika sekunteina.

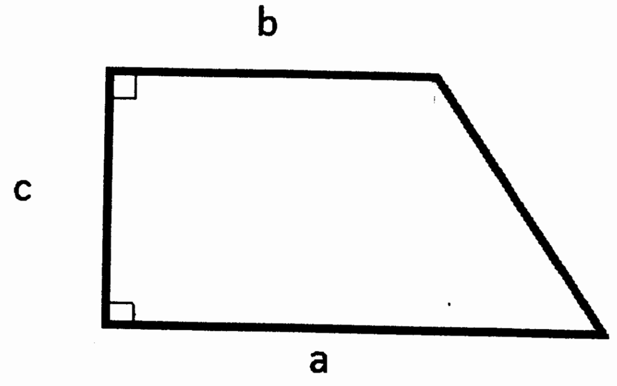
(a) Osoita, että funktio $v(t)$ on monotoninen ja määritä ajanhetki, jolloin nopeus on nolla. Mikä on nopeuden raja-arvo, kun $t \to \infty$.

(b) Osoita, että funktio $F : t \to 250 \ln(e^{0,2t} + e^{-0,2t}), t \geq 0$ on funktion v integraalifunktio.

(c) Laske, kuinka pitkän matkan hyppääjä putosi ensimmäisten 11,5 sekunnin aikana.

[LK-abitur 2007 Gymnasium Bayern]

6. Lampi on puolisuunnikkaan muotoinen. Lammen yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat a ja b ($a > b$) sekä niiden etäisyys on c (katso kuva). Lammen lävistäjien leikkauspisteessää on suihkulähde.



(a) Laskekaa kuinka kaukana suihkulähde on sivusta a.

(b) Laskekaa etäisyyden lukuarvo, kun $a = 60m$, $b = 40m$ ja $c = 30m$

[Matemaatika riigieksam 2007, Viro]

7. Mitkä luvut voidaan jakaa kahteen reaaliosaan siten, että osien tulo on yhtä suuri kuin luku itse? [Yo kevät 1912, Suomi]

8. Todista, että lausekkeen (a + c) / (b + c) arvo on lukujen 1 ja a/b välillä, jos a, b ja c ovat positiivisia lukuja. [Yo kevät 1916, Suomi]

9. Tasakylkisen kolmion kanta halkaisijana piirretään ympyrä. Niiden osien mittaluku, jotka ympyrä erottaa kolmion sivuista (tarvittaessa pidennettynä), olkoon a ja kolmion kannan mittaluku b. Mikä on kolmion pinta-ala? [Yo syksy 1912, Suomi]

10. Olkoon $p \geq 5$ alkuluku ja olkoon r niiden tapojen lukumäärä, joilla p samanlaista pelinappulaa, voidaan asettaa $p \times p$ shakkilaudalle siten, että kaikki nappulat eivät ole samalla vaakarivillä (nappulat saavat olla samassa pystysarakkeessa). Osoita, että r on jaollinen luvulla p^5.

11. Tarkastellaan jonon $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$ osasummien jonoa

$$1, 3, 5, 8, 11, 14, 18, 22, 26, 30, \ldots$$

Etsi osasummien jonon kaikki alkulukujäsenet. Ensimmäisessä jonossa luku n esiintyy n kertaa.

12. Olkoon $a_0 = 0$. Määritellään rekursiivisesti $a_n = \sqrt{a_{n-1} + n}$, kun $n \geq 1$. Määritä perustellen raja-arvo $\lim_{n\to\infty}(a_n - n)$ tai osoita, ettei raja-arvoa ole olemassa.

13. Osoita, että jokaista irrationaalilukua a kohti ovat olemassa sellaiset irrationaaliluvut b ja b', että $a+b$ ja ab' ovat molemmat rationaalisia ja ab ja $a+b'$ ovat molemmat irrationaalisia.

14. Osoita, että

$$e^{e^x} \geq e^{2x+1} - xe^{x+1}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

15. Olkoon $\langle n \rangle$ lukua $\sqrt{n}$ lähinnä oleva kokonaisluku. Laske summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\langle n \rangle} + 2^{-\langle n \rangle}}{2^n}$$

arvo.

16. Yksikkösäteisen ympyrän sisään piirretään paraabelinkaari. Onko mahdollista, että kaaren pituus on suurempi kuin 4?

17. Luokan oppilaat muodostavat tasan kolmen hengen ryhmiä. Kahdella eri ryhmällä saa olla korkeintaan yksi yhteinen jäsen. Osoita, että 46 oppilaan luokassa on 10 oppilaan joukko, joka ei sisällä kokonaan mitään kolmen hengen ryhmistä.

18. Etsi kaikki reaalilukuparit (x, y), jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = (x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4.)$$

19. Tasasivuisen kolmion ABC sisäpisteestä P piirretään kohtisuorat kolmion sivuille AB, BC ja CA. Syntyneet leikkauspisteet ovat vastaavasti X, Y ja Z. Onko välttämättä totta, että pituuksien AX, BY ja CZ summa on puolet kolmion piiristä?

20. Pahvineliö on pöydällä. Neliön kaikki kulmat taivutetaan 60 asttetta ylöspäin siten, että taitosviiva kulkee alkuperäisen neliön viereisten sivujen keskipisteestä toiseen. Nyt pahvi näyttää ylhäältä katsottuna kahdeksankulmiolta, ts. pahvin projektio pöydän tasossa on kahdeksankulmio. Laske tämän projektiokahdeksankulmion kulmien suuruudet sadasosa-asteen tarkkuudella.

21. Eräässä kaupungissa on 32 hammaslääkäriä, jotka kaikki tarjoavat omilla vastaanotoillaan hampaiden poistoa hintaan: 1. poistettava hammas 1 sentti, 2. poistettava hammas 2 senttiä, 3. poistteva 4 senttiä, 4. poistettava hammas 8 senttiä jne.

    Epätoivoisen henkilön on poistettava kaikki 32 hammastaan. Hän haluaa selvitä operaatiosta mahdollisimman halvalla. Kuinka monella eri hammaslääkärillä henkilön kannattaa käydä, kun jokaisen hammaslääkärin vastaaotolle on matkaustettava bussilla, joka maksaa 2 euroa/kyyti? Kuinka paljon koko operaatio maksaa?

22. Ville ja jaakko pelaavat 6×6 -ruudukolla seuraavaa peliä: Villellä on 18 mustaa pelinappulaa ja Jaakolla 18 valkoista pelinappulaa, ja kumpikin laittaa vuorollaan pelinappulan johonkin tyhjän ruudun keskipisteeseen. Näin jatketaan, kunnes toinen joutuu laittamaan pelinappulan niin, että neljä samanväristä nappulaa ovat jonkin neliön kärkipisteet. Neliö voi olla miten päin tahansa, eikä sivujen tarvitse olla ruudukon suuntaiset. Tällöin vuorossa oleva pelaaja häviää. Ville aloittaa. Onko Villellä voittostrategiaa? Voiko käydä niin, ettei kumpikaan ole voittanut, mutta kaikki napulat ovat laudalla? Lähde: Sphere Packing, Lewis Carrol and reversi, Martin Gardner, 2009)

23. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right) = \frac{1}{\sin(\pi/2n)}.$$