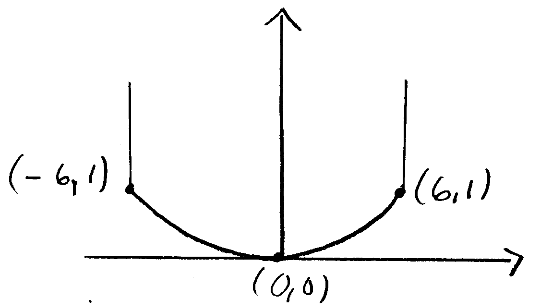
Pythagoraan polku 2012, ratkaisuja

1. Asetetaan purkki koordinaatistoon kuvan mukaisesti.



purkin alin kohta on origossa. Tällöin purkin muotoa kuvaava paraabeli kulee pisteiden (0,0), (-6,1) ja (6,1) katutta. Sijoittamalla pisteet paraabelin yhtälöön saadaan ratkaistua a=1/36, b=0 ja c=0. Siis purkin pohjaa kuvaa paraabeli $y=1/36\ x^2$.

Aluksi purkki oli suoran ympyrälieriön muotoinen ja purkin alkutilavuus oli

$V_{alku} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 6{,}0^2 \cdot 5{,}0\ cm^3 = 180\pi\ cm^3$.

Tilavuuden lisäys koostuu kahdesta pyörähdyskappaleesta, jotka muodostuvat, kun tehtävän paraabeli pyörähtää y-akselin ympäri.

Koska $y=1/36\ x^2$, niin $x^2 = 36y$ ja yhden pyörähdyskappaleen tilavuudeksi saadaan

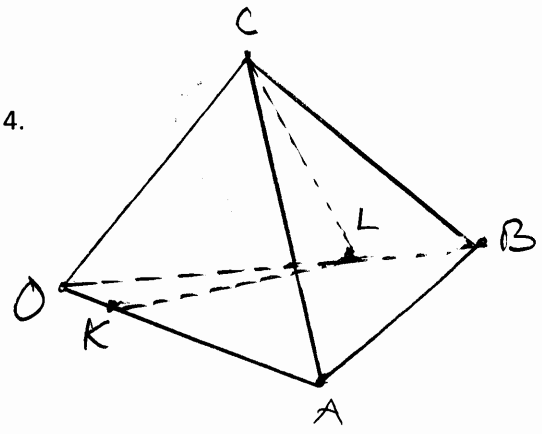
$$V_1 = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 36y dy = \pi \mathop{/}_0^1 18y^2 = 18\pi\ cm^3.$$

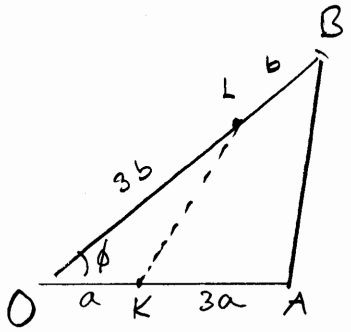
Siis tilavuuden muutosprosentti on $\frac{2V_1}{V_{alku}} \cdot 100\% = \frac{2 \cdot 18\pi\ cm^3}{180\pi\ cm^3} \cdot 100\% = 20\%$.

2. $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$, jolloi $h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) + 2g(x)(-f(x)) = 0$. Siis h on vakiofunktio, ja koska $h(0) = (f(0))^2 + (g(0))^2 = 2^2 + 1 = 5$, on $h(x) = 5$ kaikilla x.

3. Separoimalla muuttujat saadaan $\frac{dy}{y} = -3dx$, josta puolittain integroimalla saadaan $\ln y = -3x + c$ ja edelleen $y = Ce^{-3x}$. Sijoittamalla alkuehto saadaan $5 = Ce^{-3\cdot 0}$, josta saadaan C = 5. Siis $y = 5e^{-3x}$.

4.





Olkoot *OK = a* ja *LB = b*. Tällöin *OA = 4a* ja *OB = 4b*. Merkitään $\angle AOB = \phi$. Nyt kolmion OKL pinta-ala on $A_{OKL} = \frac{1}{2}a \cdot 3b \cdot \sin\phi = \frac{3}{2}ab\sin\phi$ ja kolmion OAB pinta-ala $A_{OAB} = 8ab\sin\phi$. Koska vastaavilla pyramideilla on sama korkeus *h*, niiden tilavuuksiksi saadaan

$$V_{OKLC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}abh\sin\phi = \frac{1}{2}abh\sin\phi = \text{ ja } V_{OABC} = \frac{1}{3}\cdot 8abh\sin\phi = \frac{8}{3}abh\sin\phi.$$

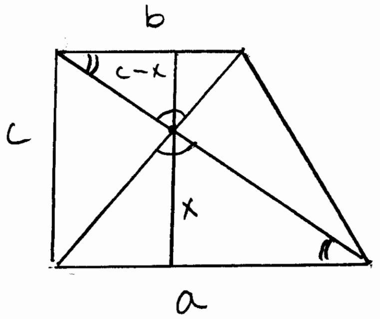
Pyramidin KABLC tilavuus on $V_{KABLC} = V_{OABC} - V_{OKLC} = \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{2}\right)abh\sin\phi = \frac{13}{6}abh\sin\phi$, ja tilavuuksien suhteeksi saadaan $\frac{1}{2}abh\sin : \frac{13}{6}abh\sin\phi = 3:13$.

5. a) Derivoimalla saadaan $v'(t) = 50\frac{0{,}4e^{0{,}4t}(e^{0{,}4t}+1)-0{,}4e^{0{,}4t}(e^{0{,}4t}-1)}{(e^{0{,}4t}+1)^2} = 40\frac{e^{0{,}4t}}{(e^{0{,}4t}+1)^2} > 0$, eli funktio *v* on aidosti monotoninen. Lisäksi $v(t) = 0$, kun $e^{0{,}4t} - 1 = 0$, josta ratkeaa *t = 0.* Rajanopeus nähdään esimerkiksi muodosta $50\frac{e^{0{,}4t}(1-1/e^{0{,}4t})}{e^{0{,}4t}(1+1/e^{0{,}4t})} \to 50$, kun $t \to \infty$, sillä $e^{0{,}4t} \to \infty$, kun $t \to \infty$.

b) Derivoimalla saadaan $F'(t) = 250\frac{0{,}2(e^{0{,}2t}-e^{-0{,}2t})}{e^{0{,}2t}+e^{-0{,}2t}} = 50\frac{e^{0{,}4t}-1}{e^{0{,}4t}+1} = v(t)$.

c)Kuljettu matka saadaan integroimalla:

$$s = \int_0^{11{,}5} v(t)dt = \Big/_{0}^{11{,}5} 250\ln(e^{0{,}2t} + e^{-0{,}2t}) \approx 404m.$$



6. a) Olkoon *x* suihkulähteen etäisyys sivusta *a*. Yhdenmuotoisista kolmioista (ristikulma, ja samankohtaiset kulmat) saadaan verranto $\frac{x}{c-x} = \frac{a}{b}$, josta ratkaistaan $x = \frac{ac}{a+b}$.

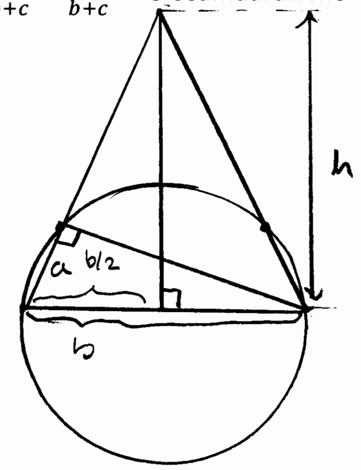
b) Sijoittamalla arvot saadaan $x = \frac{60 \cdot 30}{60+40} = 18\ (m)$.

7. Jaetaan reaaliluku x kahteen osaan ja olkoot osat y ja x-y. Tehtävän ehdon nojalla on voimassa y (x −y) = x, josta sieventämällä saadaan toisen asteen yhtälö $y^2 - xy + x = 0$, jonka ratkaisut ovat reaaliset, jos diskriminantille pätee $D = x^2 - 4x \geq 0$, eli jos $x \geq 4$ tai $x \leq 0$.

8. Jaetaan tarkastelu kolmeen osaan: 1) b < a, 2) b > a tai 3) a = b.

1) Olkoon b < a. Osoitetaan, että $1 < \frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$. On siis näytettävä, että $1 - \frac{a+c}{b+c} < 0$ ja $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} < 0$. Nyt $\frac{b+c}{b+c} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{b-a}{b+c} < 0$ osamäärän merkkisäännön perusteella. Loput kohdat todistetaan vastaavasti.

9.



Olkoon kolmion korkeus h. Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora, joten yhdenmuotoisista kolmioista saadaan : $\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} = \frac{b/2}{h}$, josta saadaan kolmion korkeudeksi $h = \frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{2a}$, jolloin kysytty kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2}bh = \frac{b^2\sqrt{b^2-a^2}}{4a}$.

10.

$$r = \binom{p^2}{p} - p = \frac{p^2(p^2-1)(p^2-2)\cdots(p^2-(p-1))(p^2-p)(p^2-(p+1))(p^2-p)!}{p!\,(p^2-p)!} - p$$
$$= \frac{p^2(p^2-1)(p^2-2)\cdots(p^2-(p-1))(p^2-p)(p^2-(p+1)) - p(p-1)!}{p(p-1)!}$$

Siis riittää näyttää, että

(1) $(p^2-1)(p^2-2)\cdots(p^2-(p-1)) - (p-1)! \equiv 0\ (mod\ p^4)$.

Olkoon

(2)
$$f(x) := (x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1)) = x^{p-1} + s_{p-2}x^{p-2} + \cdots + s_1 x + s_0.$$

Siis kongruenssiyhtälö (1) saa muodon $f(p^2) - s_0 \equiv 0\ (mod\ p^4)$ ja riittää näyttää, että

$s_1 p^2 \equiv 0\ (mod\ p^4)$ tai $s_1 \equiv 0\ (mod\ p^2)$.

Koska $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p^4) kaikilla $1 \le a \le p-1$, saadaan

(3) $x^{p-1} \equiv (x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1))$ (mod p).

Vertaamalla yhtälön (3) vasemman puolen ja yhtälön (2) oikean puolen kertoimia saadaan p|s_i

$1 \le i \le p-2$ ja sitens $_0 \equiv 0\ (mod\ p)$.

Sijoittamalla x=p yhtälöön (2) saadaan

$f(p) = (p-1)(p-2)\cdots(p-(p-1)) = (p-1)! = s_0 = p^{p-1} + s_{p-2}p^{p-2} + \cdots + s_1 p + s_0$, josta saadaan $p^{p-1} + s_{p-2}p^{p-2} + \cdots + s_1 p^2 = -s_1 p$. Koska $p \ge 5$, p|s_2 ja siten $s_1 \equiv 0\ (mod\ p^2)$.

11. Jonon termit ovat muotoa

(1) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)k$, missä $0 \le k \le n$. Tunnetusti $1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, joten (1) voidaan kirjoittaa muodossa

$\frac{(2n^2+n+6k)(n+1)}{6} = \frac{(n+1)}{a}\frac{a(2n^2+n+6k)}{6}$, missä *a* on lukujen *n+1* ja *6* suurin yhteinen tekijä. Jos n ≥ 6, niin $\frac{(n+1)}{a} > 1$ ja $\frac{a(2n^2+n+6k)}{6} > 1$ ovat kokonaislukuja, joten (1) ei voi olla alkuluku.

Siis ainoat mahdolliset alkuluvut ovat tapaukset $n \le 5$ ja $0 \le k \le n$.

Näistä alkulukuja ovat 3, 5, 11, 61, 67, 73 ja 79.

12. Näytetään, että raja-arvo on ½.

Selvästi nähdään, että $a_n \ge 0$ kaikilla n, joten $a_n \ge \sqrt{n}$.

Todistetaan induktiolla, että $a_n \leq \sqrt{n}$+1, kaikilla n.

Jos n=0, niin $0 \leq \sqrt{0} + 1 = 1$ ja väite pätee. Jos n≥1 ja $a_{n-1} \leq \sqrt{n-1} + 1$, on voimassa

$$a_n{}^2 = a_{n-1} + n \leq n + \sqrt{n-1} + 1 \leq n + 2\sqrt{n} + 1 = \left(\sqrt{n} + 1\right)^2.$$

Olkoon $b_n = a_n - \sqrt{n} - 1/2$. Tällöin $b_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ kaikilla n. Riittää siis näyttää, että $b_n \to \infty, kun\, n \to \infty$.

Jos n≥1, niin $(b_n + \sqrt{n} + \frac{1}{2})^2 = a_n{}^2 = a_{n-1} + n = b_{n-1} + \sqrt{n-1} + \frac{1}{2}$+n ja siten

$$b_n{}^2 + \left(2\sqrt{n} + 1\right)b_n + n + \sqrt{n} + \frac{1}{4} = b_{n-1} + \sqrt{n-1} + \frac{1}{2} + n.$$

Koska $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ saadaan

$b_n = \frac{b_{n-1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}}{2\sqrt{n}+1+b_n} \to \infty$, sillä osoittaja on rajoitettu ja nimittäjä kasvaa rajatta.

13. Olkoon a irrationaaliluku. Jos a^2 on irrationaalinen valitaan b=-a. Tällöin a+b=0 on rationaalinen ja ab=-a^2 on irrationaalinen.

Jos a^2 on rationaalinen valitaan b=a^2 -a. Tällöin a+b=a^2 on rationaalinen, ja ab=a^2(a-1). Koska

a = ab/(a^2) +1 on irrationaalinen myös ab on irrationaalinen. Olkoon b'=1/a tai b'=2/a. tällöin ab'=1 tai 2, jotka ovat rationaalisia. Koska a+b' =(a^2+1)/a tai a+b'=(a^2+2)/a, niin (a^2+2)/a - (a^2+1)/a =1/a, niin ainakin toinen on irrationaalinen.

14. Olkoon $f(x) = e^x - x - 1$, jolloin $f'(x) = e^x - 1$. Siis f(0)=0 on funktion f pienin arvo.

Nyt
$f(f(x)) = e^{e^x-x-1} - (e^x - x - 1) - 1 = e^{e^x-x-1} - e^x + x \geq 0$ kaikilla x. Kertomalla puolittain tekijällä e^{x+1} saadaan väite.

15. Kirjoitetaan summa uudelleen muotoon $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+<n>)} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n-<n>)}$. Koska <n> ≠ <n+1>, jos ja vain jos n=m^2+m, jollekin m, niin <n> +<n+1> ja <n> - <n+1> molemmat kasvavat yhdellä, paitsi kun n=m^2+m, jolloin lausekkeista ensimmäinen hyppää arvosta m^2+m arvoon m^2+m+2 kun taas jälkimmäisen lausekkeen arvo pysyy arvossa m^2. Siis summat saavat muodon

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m^2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m^2} = 2 + 1 = 3.$$

16. Todistetaan, että yksikkösäteisen ympyrän sisään mahtuu paraabelinkaari, jonka pituus on vähintään 4.

Tarkastellaan paraabelia $y = Ax^2$ ympyrän $x^2 + (y-1)^2 = 1$ sisällä. Oletetaan, että A > 1/2.

Ympyrän ja paraabelin leikkauspisteet ovat (0,0) ja $(\pm\frac{\sqrt{2A-1}}{A}, \frac{2A-1}{A})$. Olkoon L pisteiden (0,0) ja $(\frac{\sqrt{2A-1}}{A}, \frac{2A-1}{A})$ välisen paraabelin kaaren pituus. Osoitetaan, että kun A on riittävän suuri, on L > 2, mikä symmetrian vuoksi todistaa väitteen.

Nyt

$$L = \int_0^{\frac{\sqrt{2A-1}}{A}} \sqrt{1+(2Ax)^2}\,dx = \frac{1}{2A}\int_0^{2\sqrt{2A-1}} \sqrt{1+x^2}\,dx = 2 + \frac{1}{2A}\Big(\int_0^{2\sqrt{2A-1}} \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx - 2\Big),$$

missä viimeisessä vaiheessa järjestetään integraaliin –x. Jos x≥0, niin

$$\sqrt{1+x^2}-x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} > \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{2(x+1)}.$$

Koska integraali $\int_0^\infty \frac{1}{2(x+1)}dx$ hajaantuu, niin myös integraali $\int_0^\infty (\sqrt{1+x^2}-x)dx$ hajaantuu ja riittävän suurella A on voimassa $\int_0^{\frac{\sqrt{2A-1}}{A}} \sqrt{1+(2Ax)^2}\,dx > 2$, joten L > 2.

17. Olkoon C Luokan kaikkien 46 oppilaan joukko olkoon
$s := \max\ \{|S| \mid S \subseteq C, S \textit{ ei sisällä mitään ryhmää kokonaan.}\}$

Riittää osoittaa, että s≥10, sillä jos |S| = s > 10, voidaan valita mikä tahansa joukon S 10 alkion osajoukko.

Oletetaan, että s ≤ 9. Olkoon S joukko, jolle |S| = s ja S ei sisällä kokonaan mitään ryhmää. Olkoon v mikä tahansa luokan opiskelija $v \notin S$. Koska s on maksimaalinen, löydetään ryhmä, jonka jäseninä ovat v ja kaksi joukon S opiskelijaa. Nämä joukon S opiskelijat voidaan valita $\binom{s}{2} \leq \binom{9}{2} = 36$ tavalla. Toisaalta joukon S ulkopuolella on vähintään 37 = 46 – 9 opiskelijaa. Siten joukon S ulkopuolisten37 opiskelijoiden joukossa on vähintään yksi opiskelija u, joka ei kuulu yhteenkään ryhmään, jossa on kaksi opiskelijaa joukosta S ja yksi joukon S ulkopuolelta. Tämä siksi, että millään kahdella eri ryhmällä ei ole kahta yhteistä jäsentä. Mutta nyt S voidaan laajentaa sisältämään opiskelija u, mikä on ristiriita.

18. Vähentämällä ja lisäämällä annetut yhtälöt puolittain saadaan

$$\frac{2}{x} = x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4$$
$$\frac{1}{y} = 5x^4 + 10x^2y^2 + y^4.$$

Kertomalla ylempää yhtälöä puolittain x:llä ja alempaa y:llä ja lisäämällä ja vähentämällä saadut yhtälöt puolittain saadaan yhtälöt

$$3 = (x+y)^5, \quad 1 = (x-y)^5,$$

joista saadaan yksikäsitteinen ratkaisu $x = \frac{\sqrt[5]{3}+1}{2}$ ja $y = \frac{\sqrt[5]{3}-1}{2}$.

19. Merkitään |PA| = a, |PB| = b, |PC| =c , |PX| =x , |PY| = y , |AX| =p , |BY| =q ja |CZ| = r. Voidaan olettaa että tasasivuisen kolmion sivun pituus on 1.

Pythagoraan lauseen nojalla saadaan

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2 - x^2 & (1-p)^2 &= b^2 - x^2 \\ q^2 &= b^2 - y^2 & (1-q)^2 &= c^2 - y^2 \\ r^2 &= c^2 - z^2 & (1-r)^2 &= a^2 - z^2 \end{aligned}$$

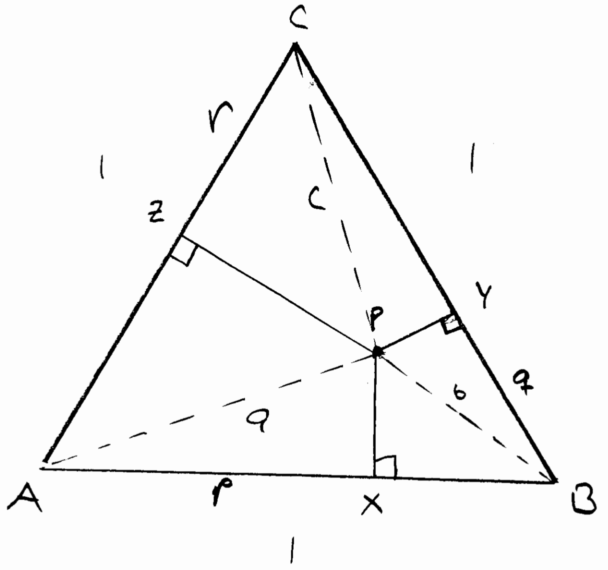
Laskemalla sarakkeiden yhtälöt puolittain yhteen saadaan

$$p^2 + q^2 + r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (1-p)^2 + (1-q)^2 + (1-r)^2,$$

josta saadaan

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 - 2p + p^2 + 1 - 2q + q^2 + 1 - 2r + r^2,$$

josta väite p+q+r =2/3 seuraa.



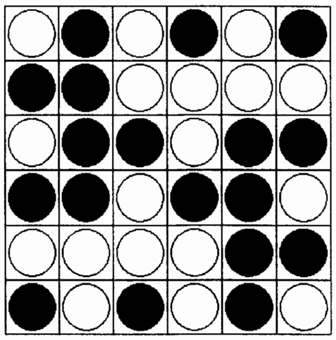
Tehtävä. Ville ja Jaakko pelaavat 6×6 -ruudukolla seuraavaa peliä: Villellä on 18 mustaa pelinappulaa ja Jaakolla 18 valkoista pelinappulaa, ja kumpikin laittaa vuorollaan pelinappulan jonkin tyhjän ruudun keskipisteeseen. Näin jatketaan, kunnes toinen joutuu laittamaan pelinappulan niin, että neljä samanväristä nappulaa ovat jonkin neliön kärkipisteet. Tällöin vuorossa oleva pelaaja häviää. Ville aloittaa.

Onko Villellä voittostrategiaa? Voiko käydä niin, ettei kumpikaan ole voittanut, mutta kaikki nappulat ovat laudalla?

(Lähde: Sphere Packing, Lewis Carroll, and Reversi, Martin Gardner, 2009)

Ratkaisu. Seuraavalla strategialla Jaakko voi varmistaa, ettei häviä. Merkitään m. rivin n. sarakkeen ruutua merkinnällä (m, n). Aina kun Ville pelaa ruutuun (k, l), niin Jaakko pelaa omalla vuorollaan ruutuun $(6 - k, l)$. Tähän ruutuun on aina mahdollista pelata tätä strategiaa käyttämällä, ja Jaakon nappuloista ei voi muodostua neliötä ennen Villeä. Jos nimittäin neljä valkoista nappulaa sijaitsisivat jonkin neliön kärkipisteissä, niin niiden pelaamista edeltävillä vuoroilla Villen olisi täytynyt laittaa neljä mustaa kiveä, jotka ovat neliön kärkipisteet.

Oheisessa kuvassa näkyy esimerkkitilanne, jossa peli on loppunut tasapeliin: kumpikaan ei ole voittanut ja kaikki nappulat ovat laudalla.



Tehtävä. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right) = \frac{1}{\sin(\pi/2n)}$$

Ratkaisu. Näytetään, että kaikilla reaaliluvuilla α ja kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee

$$\sin(\alpha)\sum_{i=1}^{n}\sin((2i-1)\alpha)=\sin^2(n\alpha),$$

jolloin tehtävän väite seuraa sijoittamalla $\alpha = \pi/2n$ ja jakamalla puolittain luvulla $\sin(\pi/2n)$.

Osoitetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Kun $n = 1$, väite pätee muodossa $\sin^2(\alpha) = \sin^2(\alpha)$. Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $n = k$ jollain k.

Sinin ja kosinin summakaavoilla saadaan

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha)\sum_{i=1}^{k+1}\sin((2i-1)\alpha) &= \sin(\alpha)\sum_{i=1}^{k}\sin((2i-1)\alpha)+\sin(\alpha)\sin((2k+1)\alpha)\\
&= \sin^2(k\alpha)+\sin(\alpha)\sin((2k+1)\alpha)\\
&= \sin^2(k\alpha)+\sin(\alpha)(\sin(2k\alpha)\cos(\alpha)+\cos(2k\alpha)\sin(\alpha))\\
&= \sin^2(k\alpha)+\\
&\quad \sin(\alpha)(2\sin(k\alpha)\cos(k\alpha)\cos(\alpha)+(\cos^2(k\alpha)-\sin^2(k\alpha))\sin(\alpha))\\
&= \sin^2(k\alpha)(1-\sin^2(\alpha))+2\sin(k\alpha)\cos(\alpha)\cos(k\alpha)\sin(\alpha)\\
&\quad +\cos^2(k\alpha)\sin^2(\alpha)\\
&= (\sin(k\alpha)\cos(\alpha)+\cos(k\alpha)\sin(\alpha))^2\\
&= \sin^2((k+1)\alpha).
\end{aligned}$$

Siispä väite pätee myös, kun $n = k + 1$, joten se pätee induktion nojalla kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla.

Vaihtoehtoinen lähestymistapa kompleksilukuja osaaville on tulkita sinit kompleksisen eksponenttifunktion avulla ja käyttää geometrisen summan kaavaa, joka myös johtaa ratkaisuun.