Pythagoraan polku 17.4.2010, ratkaisut

1. Junan nopeus on vakio $v = \dfrac{s}{t}$. Olkoon l kiskon pituus ja x kiskojen määrä, jonka juna kulkee 27 sekunnissa. Saadaan yhtälö

$$\frac{xl}{27\ [\mathrm{s}]} = \frac{x\ [\mathrm{km}]}{(60+15)\cdot 60\ [\mathrm{s}]},$$

josta $l = 0{,}006$ km. Siis kiskon pituus on 6 m.

2. Palkinnot voivat jakautua siten, että eräs saa kaikki neljä, eräs saa kolme, eräs saa kaksi ja joku muu kaksi tai kaksi muuta yhden tai kaikki neljä menevät eri henkilöille. Mahdollisuuksia on siis $6 + 6\cdot 5 + \binom{6}{2} + 6\cdot\binom{5}{2} + \binom{6}{4} = 126$.

3. Nelinumeroinen kokonaisluku $a_4a_3a_2a_1$ on jaollinen yhdellätoista, jos $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ on jaollinen yhdellätoista. Koska $2 + 3 = 1 + 4$, luvun 1234 johdannaisista yhdellätoista jaollisia ovat ne, joissa toinen ja neljäs numero ovat 2 ja 3 tai ensimmäinen ja kolmas numero ovat 2 ja 3. Siis yhdellätoista jaollisia ovat 2134, 2431, 3124, 3421, 1243, 4213, 1342 ja 4312.

4. Huomataan, että käyrä on symmetrinen suoran $y = x$ suhteen. Tästä seuraa, että jos käyrällä on vaakasuora eli x-akselin suuntainen tangentti pisteessä (x_0, y_0), niin sillä on pystysuora eli y-akselin suuntainen tangentti pisteessä (y_0, x_0). Derivoimalla implisiittisesti yhtälöä $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ saadaan $3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0$, josta ratkaistaan $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$. Käyrän tangentti on vaakasuora, jos $y' = 0$ eli $y = x^2$. Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan $x^3 - 3x\cdot x^2 + x^6 = 0$, josta $x^3(x^3 - 2) = 0$ ja edelleen $x = 0$ tai $x = \sqrt[3]{2}$. Käyrällä on siis vaakasuora tangentti pisteessä $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ ja pystysuora tangentti pisteessä $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. Kun $x = 0$, niin $y = 0$, joten derivaatan lauseke on määrittelemätön, kun $x = 0$. Käyrän käyttäytyminen origossa voidaan selvittää siirtymällä napakoordinaatteihin $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Kun nämä sijoitetaan yhtälöön $x^3 - 3xy + y^3 = 0$, voidaan ratkaista

$$r = \frac{3\cos t\sin t}{\cos^3 t + \sin^3 t}.$$

Ehto $r \geq 0$ rajaa t:n väleihin $[0, \frac{\pi}{2}]$, $(\frac{3\pi}{4}, \pi]$ ja $[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4})$. Kun t kuuluu näihin väleihin, niin

$$x = r\cos t = \frac{3\cos^2 t\sin t}{\cos^3 t + \sin^3 t} = \frac{3\tan t}{1 + \tan^3 t}, \quad y = r\sin t = \frac{3\cos t\sin^2 t}{\cos^3 t + \sin^3 t} = \frac{3\tan^2 t}{1 + \tan^3 t}.$$

Tarkastellaan erotusosamäärää $\dfrac{y-0}{x-0} = \dfrac{y}{x} = \tan t$. Kun $t \to 0$ tai $t \to \pi$, niin erotusosamäärä lähestyy nollaa. Käyrällä on siis vaakasuora tangentti origossa. Symmetrian vuoksi origossa on myös pystysuora tangentti. – Cartesiuksen lehti Γ on käyrä, joka leikkaa itsensä (kohtisuorasti) origossa. Jos "tangentti" on suora, joka kohtaa käyrän yhdessä pisteessä, mutta ei toisessa läheisessä pisteessä, niin jokainen origon kautta kulkeva suora on Γ:n tangentti samoin kuin esimerkiksi jokainen neliön kärjen kautta kulkeva suora olisi neliön piirin tangentti. Annettu ratkaisu perustuu tulkintaan, jonka mukaan pisteeseen $(x_0,\,y_0)$ piirretty käyrän tangentti on käyrän pisteiden $(x_0,\,y_0)$ ja $(x,\,y)$ kautta kulkevan suoran "rajasuora", kun $(x,\,y)$ lähestyy $(x_0,\,y_0)$:aa käyrää pitkin.

5. Epäyhtälö on määritelty, kun $x \neq \pm\sqrt{3}$. Ottamalla epäyhtälön oikealla puolella $2x$ yhteiseksi tekijäksi ja supistamalla $(x+\sqrt{3})$:lla sekä viemällä kaikki termit epäyhtälön vasemmalle puolelle saadaan

$$\frac{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2(1-2x)}{x-\sqrt{3}} \leq 0,$$

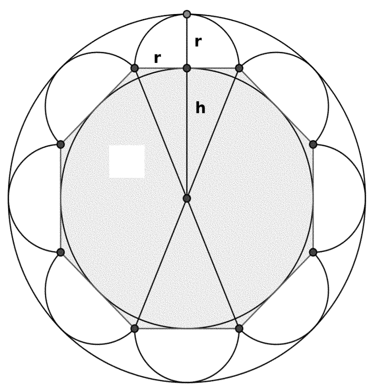
josta epäyhtälön ratkaisuksi saadaan osamäärän merkkisäännön avulla $-\sqrt{3} > x$ tai $-\sqrt{3} < x \leq \dfrac{1}{2}$ tai $x > \sqrt{3}$.

6. Tehtävän munkkirinkeli syntyy, kun ympyrä, jonka keskipiste on $(0,\,5)$ ja säde 2,5 cm, pyörähtää x-akselin ympäri. Pappuksen lauseen nojalla näin muodostuvan kappaleen tilavuus saadaan, kun kerrotaan ympyrän ala ympyrän keskipisteen pyörähdyksen aikana kulkemalla matkalla. Siis $V = 2\pi 5\cdot\pi(2{,}5)^2 = \dfrac{125\pi^2}{2}\,\mathrm{cm}^3 \approx 616{,}85\,\mathrm{cm}^3$.
Tilavuus voidaan laskea turvautumatta Pappuksen sääntöön käyrien $y_1 = 5+\sqrt{2{,}5^2-x^2}$ ja $y_2 = 5-\sqrt{2{,}5^2-x^2}$ synnyttämien pyörähdyskappaleitten tilavuuksien erotuksena. Koska $y_1^2-y_2^2 = 20\sqrt{2{,}5^2-x^2}$, on laskettava

$$V = 20\pi\int_{-2{,}5}^{2{,}5}\sqrt{2{,}5^2-x^2}\,dx.$$

Integraali on 2,5-säteisen puoliympyrän ala. Siis $V = 10\cdot 2{,}5^2\pi^2$.

7. Kahdeksankulmio muodostuu 16 suorakulmaisesta kolmiosta, jonka pienin kulma on $\alpha = \dfrac{2\pi}{16} = \dfrac{\pi}{8}$. Olkoon taikinaympyrän säde $R = h + r$. Kuvion kolmiosta saadaan $\dfrac{r}{h} = \tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$, joten $r = h(\sqrt{2}-1)$. Nyt $A_T = \pi R^2 = \pi(r+h)^2 = 2\pi h^2$ ja $A_P = 16(\dfrac{hr}{2}+\dfrac{\pi r^2}{4}) = (8\sqrt{2}-8+12\pi-8\sqrt{2}\pi)h^2$. Siis tyhjää on $\dfrac{A_T-A_P}{A_T} = \dfrac{8-10\pi-8\sqrt{2}+8\sqrt{2}\pi}{2\pi} \approx 0,12946 \approx$ 13%.



8. Jokaista lukualueella olevaa kasvavaa kokonaislukua vastaa joukko, jossa on 9 numeroa väliltä $0 \ldots 9$ ja sama numero saa esiintyä monta kertaa. Esimerkiksi kokonaislukua 22588 vastaa joukko $\{0, 0, 0, 0, 2, 2, 5, 8, 8\}$. Edelleen jokaista tällaista joukkoa vastaa esitys, jossa on 9 kertaa merkki $\times$ (valittu numero) ja 9 kertaa merkki $|$ (erotinmerkki). Esimerkiksi kokonaislukua 22588 vastaa esitys $\times\times\times\times || \times\times ||| \times ||| \times\times |$. Tällaisten esitysten määrä on sama kuin 18-alkioisen joukon 9-alkioisten osajoukkojen määrä 3li $\binom{18}{9} = 48620$. (Tehtävä ja ratkaisu: Antti Laaksonen)

9. Lasketaan ensin lieriön ”teroitetun yläosan” tilavuus. Olkoon lieriön akseli z-akseli. Leikataan lieriötä tasoilla $x + z = R$ ja $z = x + R$. Kappaleen ja tason $x = t$, $0 < t < R$ leikkauskuvio on suorakaide, jonka korkeus on $R - t$ ja kanta (xy-tasossa) $2\sqrt{R^2 - t^2}$. Lieriön teroitetun osan tilavuus on silloin

$$V_1 = 4\int_0^R (R - t)\sqrt{R^2 - t^2}\, dt$$

Nyt

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - t^2}\, dt$$

on R-säteisen ympyrän neljänneksen ala ja

$$\int_0^R (-2t)\sqrt{R^2 - t^2}\, dt = \frac{2}{3}\Big/_0^R (R^2 - t^2)^{3/2} = \frac{2}{3}R^3.$$

Kun nämä yhdistetään, saadaan $V_1 = \pi R^3 - \frac{4}{3}R^3$; koska lieriön ”ehjäksi jääneen” alaosan tilavuus on $V_2 = \pi R^3$, koko kappaleen tilavuus on $2\pi R^3 - \frac{4}{3}R^3$.

10. Olkoot kolmion sivut a, b ja c. Kun kolmion ala lausutaan kolmella eri tavalla sivun ja vastaavan korkeuden tulona, saadaan $a = 2b = \frac{3}{2}c$. Jos sivua a vastaan piirretty korekusjana (jonka pituus siis on 1) jakaa a-sivun osiin x ja $a - x$, niin Pythagoraan lauseen perusteella $c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$ eli

$$x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{4} + 1\right)a = \frac{43}{72}a.$$

Pythagoraan lauseen noalla on edelleen $c^2 - x^2 = 1$ eli $\frac{4}{9}a^2 = 1 + \left(\frac{43}{72}\right)^2 a^2$. Tästä ratkaistaan $a = \frac{72}{\sqrt{455}}$. Muut kaksi sivua ovat siis $b = \frac{36}{\sqrt{455}}$ ja $c = \frac{48}{\sqrt{455}}$.

11. Olkoon neliö $ABCD$, M sivun AB keskipiste ja P janojen AC ja MD leikkauspiste. Kolmiot AMP ja CDP ovat yhdenmuotoiset (kaikki vastinkulmat yhtä suuria). Koska $DC = 2 \cdot AM$, niin $PC = 2 \cdot AP$. Koska $AC = \sqrt{2} \cdot a$, niin $AP = \frac{\sqrt{2}}{3}a$ ja $PC = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

12. Rivi, jossa ei ole kahta peräkkäistä numeroa, on muotoa $k_1, k_2 + 1, k_3 + 2, ..., k_7 + 6$, missä $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_7 \le 33$. Luvut $k_1, \ldots, k_7$ voidaan valita $\binom{33}{7}$ eri tavalla, joten todennäköisyys, että oikeassa lottorivissä ei ole kahta peräkkäistä numeroa on

$$1 - \frac{\binom{33}{7}}{\binom{39}{7}} \approx 0{,}722.$$

13. Oletetaan että yhtälöllä on ratkaisuna kokonaisluvut a, b, c ja d, joista kaikki eivät ole nollia. Jos $m = \text{s.y.t.}(a, b, c, d)$, niin $a_1 = a/m, b_1 = b/m, c_1 = c/m$ ja $d_1 = d/m$ on yhtälön kokonaislukuratkaisu, jolle $\text{s.y.t.}(a_1, b_1, c_1, d_1) = 1$. Siis voidaan olettaa, että (a, b, c, d) on yhtälön ratkaisu, jolle $\text{s.y.t.}(a, b, c, d) = 1$. Yhtälö voidaan kirjoittaa yhtäpitävään muotoon $2(a^2 + 5b^2) = (2c + d)^2 + 5d^2$, joten $2a^2 \equiv (2c + d)^2 \pmod 5$. Koska 2 on epäneliönjäännös modulo 5, niin välttämättä $a \equiv 2c + d \equiv 0 \pmod 5$. Siis $a = 5X$ ja $2c+d = 5Y$ joillekin kokonaisluvuille X ja Y, ja voidaan kirjoittaa $2(5X^2 + b^2) = 5y^2 + d^2$. Vastaavasti kuin edellä päätellään, että $2b^2 \equiv d^2 \pmod 5$, joten $b \equiv d \equiv 0 \pmod 5$. Siis $a \equiv b \equiv c \equiv d \equiv 0 \pmod 5$, mikä on ristiriita oletuksen $\text{s.y.t.}(a, b, c, d) = 1$ kanssa. Siis yhtälön ainoa kokonaislukuratkaisu on $a = b = c = d = 0$.

14. a) Olkoon $f(t) = (\tan t - t)/t^3$, kun $0 < t \le 1$. Derivoimalla saadaan $f'(t) = g(t)/t^4$, missä $g(t) = t\tan^2 t - 3\tan t + 3t$, jolloin $g'(t) = \dfrac{\sin t}{\cos^3 t}(2t - \sin 2t)$. Siispä $g'(t) > 0$, kun $0 < t \le 1$, joten $g(t) > g(0) = 0$, kun $0 < t \le 1$. Esimerkiksi soveltamalla kolme kertaa l'Hospitalin sääntöä nähdään, että $\lim_{t\to 0+} f(t) = \dfrac{1}{3}$. Näin ollen $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{\tan t - t}{t^3} \le \tan(1) - 1$, kun $0 < t \le 1$. Koska $\tan(1) < \tan(\pi/3) = \sqrt{3} < 2$, niin pätee $0 < \dfrac{\tan t - t}{t^3} \le 1$, kun $0 < t \le 1$ ja $t \le \tan t \le t + t^3$, kun $0 \le t \le 1$.

b) Kun $0 \le x \le \pi$ ja $0 < y \le 1$, niin $0 \le \sin x \le 1$, joten on voimassa $0 \le y \sin x \le 1$. Tehtävän a)-kohdan nojalla

$$y \sin x \le \tan(y \sin x) \le y \sin x + (y \sin x)^3,$$

joten

$$0 \le \frac{\tan(y \sin x) - y \sin x}{y} \le y^2 \sin^3 x.$$

Integroimalla yli välin $0 \le x \le \pi$ saadaan

$$0 \le \frac{1}{y} \int_0^\pi (\tan(y \sin x) - y \sin x) dx \le y^2 \int_0^\pi \sin^3 x dx.$$

Antamalla $y \to 0+$ saadaan

$$\lim_{y \to 0+} \frac{1}{y} \int_0^\pi (\tan(y \sin x) - y \sin x) dx = 0,$$

ja siten

$$\lim_{y\to 0+} \frac{1}{y}\int_0^\pi \tan(y\sin x)dx = \int_0^\pi \sin x dx,$$

eli

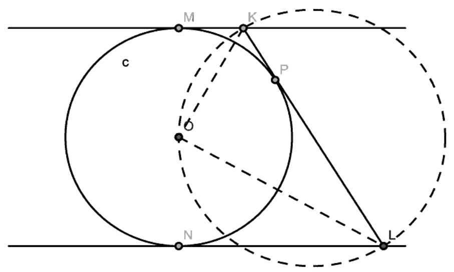
$$\lim_{y\to 0+} \frac{1}{y}\int_0^\pi \tan(y\sin x)dx = 2.$$

Korvaamalla y yllä $-y$:llä nähdään, että

$$\lim_{y\to 0-} \frac{1}{y}\int_0^\pi \tan(y\sin x)dx = 2.$$

Siis on näytetty, että $L = 2$.

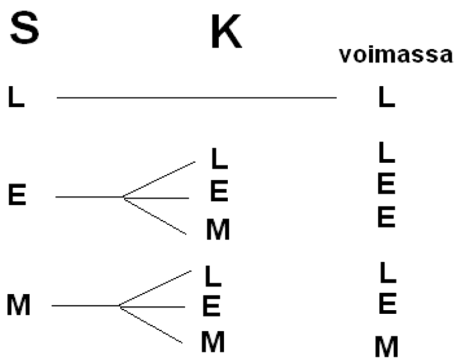
15. Riittää, kun näytetään että on $\angle KOL$ on suora kulma. Koska $OM = OP$, niin OK puolittaa kulman $\angle MKP$ ja vastaavasti, koska $ON = OP$, niin OL puolittaa kulman $\angle PLN$. Koska $\angle MKP + \angle NLP = 180°$, niin $\angle OKL + \angle OLK = 90°$ ja $\angle KOL = 90°$.



16. Symmetrian vuoksi riittää tarkastella epäyhtälöä $|x| + |y| + |x + y| \le 2$ tason ensimmäisessä ja toisessa neljänneksessä. Ensimmäisessä neljänneksessä $x, y \ge 0$, ja epäyhtälö sievenee muotoon $x + y \le 1$, joka toteutuu suoran $y = -x + 1$ alapuolella.

Kun $x \le 0$ ja $y \ge 0$, tarkastellaan erikseen tapaukset $x+y \ge 0$ ja $x+y < 0$. Kun $x+y \ge 0$, epäyhtälö sievenee muotoon $y \le 1$ ja kun $x + y < 0$, epäyhtälö sievenee muotoon $x \ge -1$. Alueen pinta-ala on siis $A = 2 \cdot (1 + \frac{1 \cdot 1}{2}) = 3$.

17. Aineiden arvosanat ovat toisistaan riippumattomia. Yhden aineen tulos nähdään puukuviosta. Lopullisia arvosanoja vastaavat todennäköisyydet ovat: $P(L) = 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}84$, $P(E) = 0{,}3^2 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$ ja $P(M) = 0{,}1^2 = 0{,}01$. Nyt siis P(syksyllä neljä L:ää) $= 0{,}6^4 = 0{,}1296$, P(keväällä neljä L:ää) $= 0{,}84^4 = 0{,}4979$, P(syksyllä väh. yksi M) $= 1 - 0{,}9^4 = 0{,}3439$ ja P(keväällä väh. yksi M) $= 1 - 0{,}99^4 = 0{,}03940$.



18. Koska $\sin C \le 1$ ja $\sin A \sin B \ge 0$, niin $1 \ge \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \ge \cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C = 1$. Epäyhtälöissä on oltava yhtäsuuruus, joten on oltava $\cos(A - B) = 1$ ja $\sin C = 1$. Siis $\angle C = 90°$ ja $\angle A = \angle B = 45°$, joten kolmio ABC on suorakulmainen tasakylkinen kolmio.

19. Koska pois heitetyissä korteissa on yhtä monta punaista ja mustaa korttia, myös pelaajien saamien korttien määrät ovat samat. Siis pelin loputtua molemmilla pelaajilla on aina yhtä monta korttia eikä peli ole sinulle kannattavaa aloitusmaksun vuoksi. Jokainen pelaamasi peli maksaa sinulle euron.

20. Voidaan olettaa, että $P(x) > Q(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Tällöin $P(P(x)) > Q(P(x)) = P(Q(x)) > Q(Qx))$, mistä tulos seuraa. (1980 Canadian Mathematical Olympiad)