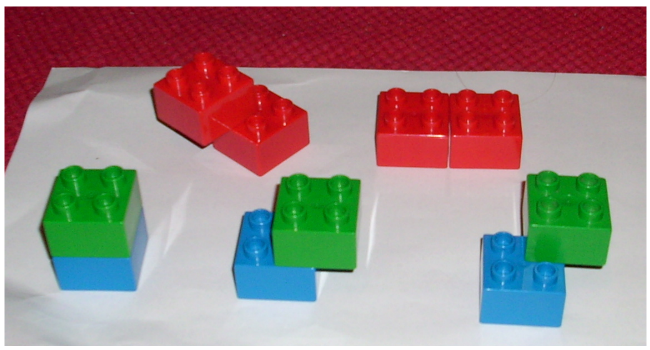
## Pythagoraan polku 5.4.2008

*Ratkaiskaa jokainen tehtävä omalle paperille ja merkitkää joka paperiin tehtävän numero ja joukkueenne tunnus (tai koulun nimi).*

1. Kaksi 2×2-"nastan" Lego-palikkaa voidaan liittää toisiinsa kolmella eri tavalla. Tavat näkyvät alla olevasta kuvasta (sinisten ja vihreiden yhdistelmät). Vasemmanpuoleinen punainen yhdistelmä on sama ja oikealla olevat punaiset palikat eivät ole kiinni – niitä ei siis lasketa. Kuinka monta erilaista rakennelmaa voi kolmesta keskenään saman värisestä kuvan mukaisesta Lego-palikasta tehdä?



2. Etsi kaikki kokonaisluvut $x$ ja $y$, jotka toteuttavat yhtälön

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}.$$

3. Suorakulmaisen särmiön muotoisen huoneen lattian nurkkien koordinaatit ovat (0,0,0), (5,0,0), (5,7,0) ja (0,7,0). Huoneen korkeus on 3. Lattialla pisteessä (1,1,0) on hämähäkki. Se pystyy ryömimään lattiaa, seiniä ja kattoa pitkin. Hämähäkki aikoo liikkua katossa sijaitsevaan pisteeseen (4,5,3) lyhintä mahdollista reittiä pitkin. Kuinka pitkä on tämä reitti?

4. Kuinka monta nollaa on luvun 100! lopussa? $(100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100)$

5. Henkilö A maalaa talon 20:ssa tunnissa ja henkilö B maalaa saman talon 30:ssä tunnissa. Kuinka kauan talon maalaus kestäisi jos molemmat henkilöt maalaisivat taloa yhtä aikaa?

6. Todista, että on olemassa irrationaaliluvut $x$ ja $y$ siten, että $x^y = \frac{1}{2}$ ja $xy = 1$.

7. Neljä merirosvoa ovat saaneet aarteekseen 100 kultarahaa. Heillä on tarkka säännöstö kuinka rahat jaetaan. Yksi merirosvoista on kapteeni, toinen adjutantti, kolmas korpraali ja neljän tavallinen rivimies. Kapteeni saa ensimmäiseksi ehdottaa kuinka rahat jaetaan kullekin merirosvolle. Kaikki merirosvot äänestävät hyväksytäänkö ehdotus vaiko ei, mukaanlukien kapteeni itse. Mikäli yli 50% äänistä hyväksyy, rahat jaetaan kuten on ehdotettu ja he jatkavat matkaa. Mikäli 50% tai yli äänistä hylkää ehdotuksen, kapteeni heitetään laidan yli mereen ja jäljelle jääneet tekevät uuden iteraation samaa prosessia, jossa nyt adjutantti saa ehdottaa rahojen jakamista. Mikäli adjutantin ehdotus hylätään, hänetkin heitetään mereen ja seuraavaksi korpraali saa ehdottaa rahan jakoa kahdelle jäljelle jääneelle samalla prosessilla. Jos korpraalikin lentää laidan yli, rivimies saa kaiken. Merirosvot ovat täysin loogisia sekä ajavat viimeiseen lanttiin asti omaa etuaan ohi kaiken muun. He myös priorisoivat toisen merirosvon laidan yli heittämisen oman kuolemansa ohi, eli mieluummin kuolevat itse ja tapattavat lisäksi jonkun toisen kuin eivät ketään. Mikä on kapteenin paras ehdotus, jolla hän saa eniten rahaa?

8. Määritä käyrän $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ sen tangentin yhtälö, joka ei ole samansuuntainen minkään muun tangentin kanssa.

9. Kun yksikköympyrä vierii pitkin $x$-akselia, niin ympyrän kehän kiinteä piste piirtää *sykloidi*-käyrän. Tällöin ympyrän keskipiste liikkuu suoralla $y = 1$. Olkoon käyrän piirtävä piste origossa, kun ympyrän keskipiste on pisteessä (0,1).

   (a) Määritä tämän sykloidin yhtälö parametrimuodossa.

   (b) Mikä on sykloidi-käyrän pituus, kun ympyrä on vierinyt kulman $0 < t \leq 2\pi$ verran?

10. Laske

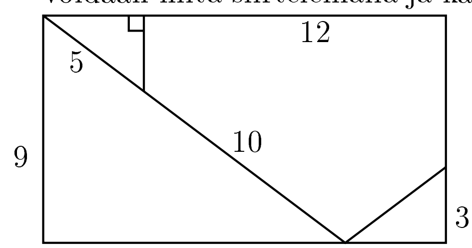
$$\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}dx$$

11. Olkoon $P$ erään tasokuvion reunan pituus ja $S$ kyseisen kuvion pinta-ala. Määritellään suhde $\alpha$ kaavalla

$$\alpha = \frac{S}{P^2}.$$

Onko neliö mahdollista jakaa kahteen osaan siten että jokaisen osan $\alpha$ suhdeluku on suurempi kuin alkuperäisen neliön? Perustele.

12. Suorakulmio on leikattu osiin kuten alla olevasta kuvasta käy ilmi. Kuvioon on annettu joidenkin osien pituuksia. Todista että kuvioista voidaan niitä siirtelemällä ja kääntelemällä muodostaa neliö.




13. Lattiafunktion arvo $\lfloor x \rfloor$ on se kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin $x$. Eli esimerkiksi $\lfloor 1,73 \rfloor = 1$ ja $\lfloor 7 \rfloor = 7$. Määritä funktio $f(n)$ siten että $\lfloor f(n) \rfloor$ muodostaa jonon

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$$

kun $n$ käy läpi kaikki kokonaisluvut yhdestä eteenpäin.

14. Heitetään tavallista kuusitahkoista noppaa. Nopan heittosarja 2–1–1 tarkoittaa, että noppaa heitetään kolmesti, ensimmäisen heiton silmäluku on 2 ja kahden muun heiton silmäluku on 1. Tämän heittosarjan summa on 4 $(2 + 1 + 1)$. Kaikkiaan summan 4 tuottaa kahdeksan eri heittosarjaa, nimittäin sarjat 1–1–1–1, 1–1–2, 1–2–1, 2–1–1, 1–3, 3–1, 2–2 ja 4.

    (a) Kuinka monta eri heittosarjaa tuottaa summan 12?

    (b) Kuinka monessa a-kohdan heittosarjoista on parillinen määrä heittoja?

15. Laske tarkka arvo lausekkeelle

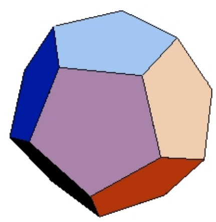
$$\ln\sin\frac{\alpha}{2^{100}} + \ln\cos\alpha + \ln\cos\frac{\alpha}{2} + \ln\cos\frac{\alpha}{2^2} + \ldots + \ln\cos\frac{\alpha}{2^{100}}, \qquad \text{kun } \alpha = \tfrac{\pi}{4}.$$

16. Olkoon $p(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$ kokonaislukukertoiminen polynomi, eli kertoimet $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Jos on olemassa neljä erillistä kokonaislukua $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 5,$$

niin todista, ettei ole olemassa kokonaislukua $m$ siten että $p(m) = 8$.

17. Dodekaedri on säännöllinen 12-tahokas, joka koostuu 12:sta säännöllisestä viisikulmiosta. Jokaisen kahden vierekkäisen viisikulmion muodostamien tasojen välinen kulma on sama. Laske tämä kulma.



18. Pisteet $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ muodostavat tetraedrin. Kuinka monta palloa voidaan sijoittaa avaruuteen niin että ne sivuavat jokaista tämän tetraedrin tahkon sisältävää tasoa?

19. Ympyrän sisäpuolelle asetetaan satunnaisesti piste. Sitten ympyrän sisäpuolelle asetetaan toinen piste ja näiden kahden pisteen kautta piirretään suora, joka leikkaa ympyrän kahdessa pisteessä. Nämä kaksi pistettä määräävät ympyrälle kaksi kaarta. Mikä on todennäköisyys asettaa ensimmäinen piste niin, että laitettiinpa toinen piste miten tahansa, niin pisteiden kautta muodostuvien molempien kaarien pituus on enemmän kuin $\frac{1}{3}$ ympyrän kehän pituudesta?