Pythagoraan polku –matematiikkakilpailu 2016

Ratkaisuja

1. Luvun $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$ likiarvoksi laskimella saadaan noin 2. Onko myös luvun tarkka arvo tasan 2.

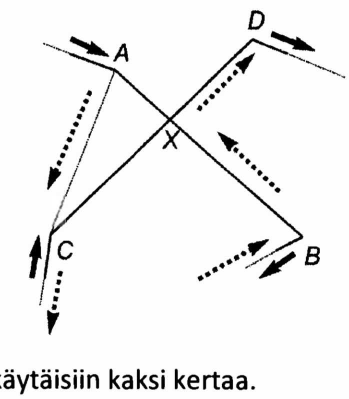
Ratkaisu. Kirjoitetaan $a=\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$ ja $b=\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$. Tällöin $a^3-b^3=20$ ja $ab=\sqrt[3]{108-100}=2$. Nyt $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)=20-6(a-b)$. Merkitään $x=a-b$, jolloin saadaan yhtälö $x^3=20-6x$. Huomataan, että $x=2$ on ratkaisu, eikä muita ratkaisuja ole, sillä $x^3+6x-20=(x-2)(x^2+2x+10)$. Siis lausekkeen $a-b$ arvo on tasan 2.

2. Luettelossa on n erisuurta lukua (n>1). Luvuista muodostetaan kaikki mahdolliset kahden erisuuren luvun summat. Osoita, että näin saadaan ainakin 2n-3 eri summan arvoa.

Ratkaisu Olkoot luvut suuruusjärjestyksessä $a_1<a_2<\cdots<a_n$. Tarkastellaan lukuja a_1 tai a_n sisältäviä summia. Tällaisia summia on tasan $2n-3$ kappaletta, sillä summia a_1+a_k on $n-1$ kappaletta ja summia a_k+a_n on $n-1$ kappaletta summa a_1+a_n laskettiin kahdesti. Riittää siis näyttää, että summat ovat erisuuria. Summat a_1+a_k ovat keskenään erisuuria, sillä luvut a_k ovat erisuuria. Samoin summat a_n+a_k ovat keskenään erisuuria. On siis tarkastettava, että summa a_1+a_k $(k\neq n)$ ja a_l+a_n $(l\neq 1)$ eivät voi olla samoja. Koska $a_1+a_k<a_1+a_n<a_l+a_n$, niin a_1+a_k ja a_l+a_n eivät voi olla samoja.

3. Pelikentällä on kahdeksan erillistä pistettä, joista jokaisen kautta juoksijan on kuljettava täsmälleen kerran. Juoksija on löytänyt lyhimmän reitin, joka kulkee pisteiden kautta. Osoita, että reitti ei leikkaa itseään.

Ratkaisu



Lyhin reitti alkaa ja päättyy johonkin kahdeksasta pisteestä. Oletetaan, että lyhin reitti leikkaa itseään, jolloin kentällä on kohta X, jossa juoksija käy vähintään kaksi kertaa. X ei voi olla mikään annetuista kahdeksasta pisteestä, sillä niissä käydään täsmälleen kerran. Olkoon A kahdeksasta pisteestä se, jossa juoksija käy ennen kuin hän käy pisteessä X ensimmäisen kerran ja olkoon piste B, se johon hän jatkaa pisteestä X. Vastaavasti määritellään pisteet C ja D, kun juoksija ohittaa pisteen X toisen kerran. Koska kahden pisteen välinen lyhin reitti on suora, niin lyhin reitti sisältää janat AB ja CD ja piste X on molemmilla näistä janoista. Janat AB ja CD eivät voi olla samalla suoralla, sillä muuten vähintään yhdessä pisteistä A, B, C tai D käytäisiin kaksi kertaa.

Muutetaan reittiä seuraavasti: Juoksija juoksee alkuperäistä reittiä pitkin pisteeseen A. Pisteestä A hän jatkaa suoraan pisteeseen C, josta hän jatkaa alkuperäistä reittiä päinvastaiseen suuntaan pisteeseen B. Pisteestä B jatketaan pisteeseen X kautta pisteeseen D ja loppumatka juostaan alkuperäistä reittiä pitkin.

Uusi reitti kulkee kaikkien 8 pisteen kautta, sillä pisteiden A ja X sekä C ja X välissä ei ole pisteitä. Alkuperäinen reitti lyheni matkan AX+XC verran ja piteni matkan AC verran. Jos piste X ei ole janalla AC, niin kolmioepäyhtälön perusteella AX+XC > AC, joten päädyttiin alkuperäistä lyhintä reittiä lyhempään reittiin, mikä on mahdotonta. Jos piste X on janalla AC, niin koska myös pisteet A, X ja B ovat samalla janalla ja siten janat AB ja CD olisivat samalla suoralla, vähintään yhdessä pisteistä A, B, C, D käytäisiin kaksi kertaa. Siis lyhin reitti ei leikkaa itseään.

4. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku n siten, että 3n on kokonaisluvun kuutio (3. potenssi) ja 5n kokonaisluvun 5. potenssi.

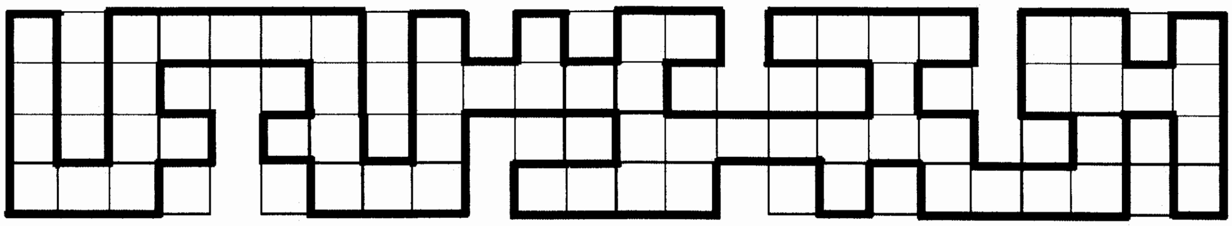
Ratkaisu. On löydettävä pienin positiivinen kokonaisluku n, jolla yhtälöparilla $3n = a^3, \quad 5n = b^5$ on positiivisia kokonaislukuratkaisuja. Ensimmäisen yhtälön perusteella a on kolmella jaollinen, joten $a^3 = 3n$ on jaollinen luvulla 3^3 ja siten n on jaollinen kolmella. Samoin osoitetaan, että n on jaollinen viidellä. Siis n voidaan kirjoittaa muodossa $n = 3^p 5^q r,$ missä p,q ja ovat positiivisia kokonaislukuja ja r ei lisäksi ole jaollinen kolmella tai viidellä. Yhtälöt voidaan siis kirjoittaa muodossa $3^{p+1}5^q r = a^3, \quad 3^p 5^{q+1} r = b^5$. Jos $3^{p+1}5^q r$ on kuutioluku, niin p+1 ja q ovat kolmella jaollisia ja r on kuutioluku. Saadaan $p + 1 = 3p_1,$ $q = 3q_1$, missä p_1 ja q_1 ovat positiivisia kokonaislukuja. Vastaavasti koska $3^p 5^{q+1} r$ on viides potenssi ovat p ja q+1 viidellä jaollisia ja löydetään positiiviset kokonaisluvut p_2 ja q_2, joille on voimassa $p = 3p_1 - 1 = 5p_2$ ja $q + 1 = 3q_1 + 1 = 5q_2$. Kokeilemalla löydetään pienimmät arvot $p_1 = 2$ ja $q_1 = 3$. Siis $p \geq 3 \cdot 2 - 1 = 5$ ja $q \geq 3 \cdot 3 = 9$. Siis $n = 3^p 5^q r \geq 3^5 5^9$ ja koska $n = 3^5 5^9$ on ratkaisu, sillä $3n = 3^6 \cdot 5^9 = (3^2 \cdot 5^3)^3$ ja $5n = 3^5 \cdot 5^{10} = (3 \cdot 5^2)^5$, on $n = 3^5 5^9$ pienin mahdollinen ratkaisu.

5. Anne ja Bert pelaavat seuraavanlaista peliä 1xn ruudukolla. Ruudut ovat alun pitäen valkoisia. Vuorossa oleva pelaaja voi kääntää joko yhden tai kaksi vierekkäistä valkeaa ruutua mustaksi. Pelin voittaa pelaaja, joka kääntää viimeisen valkean ruudun tai kaksi viimeistä valkea ruutua mustiksi. Anne aloittaa pelin. Millä ruutumäärillä n Annella on voittostrategia?

Ratkaisu Annella on aina voittava strategia. Aloittaja voittaa 1x1 ja 1x2 laudan tapauksessa jo ensimmäisellä siirrolla. Olkoon ruutujen määrä n>2. Jos ruutujen määrä n=2k+1on pariton voittaa Anne kääntämällä ensimmäisellä siirrolla k+1 ruudun, joka jakaa pelilaudan kahteen osaan. Anne voittaa kääntämällä siirtovuorollaan aina symmetrisesti Bertin siirtoa vastaavan ruudun tai ruudut. Jos ruutujen määrä on parillinen n=2k, Anne voittaa kääntämällä ensimmäisellä siirrollaan kaksi keskimmäistä ruutua (k. ja k+1.) ja pelaamalla seuraavilla siirtovuoroillaan Bertin siirrot symmetrisesti.

6. Alla on kuvattu 84 yksikköneliöstä koostuva ruudukko. Ruudukkoon on tummalla viivalla piirretty kaksi itseään leikkaamatonta yksinkertaista suljettua käyrää, joiden pituudet ovat 20 ja 66 pituusyksikköä. Käyrät kulkevat yksikköneliöiden reunaviivoja pitkin eivätkä ne saa kulkea saman pisteen kautta kuin korkeintaan yhden kerran. Kuinka pitkä on pisin mahdollinen ruudukkoon piirretty yksinkertainen suljettu käyrä?

Ratkaisu.



Pisimmän polun pituus on 120 askelta. Yllä olevaan kuvaan on piirretty yksi poluista. Osoitetaan, että pidempää polkua ei ole mahdollista piirtää. Ruudukko koostuu viidestä 4x4 neliöstä, joissa jokaisessa on 5x5-pistettä. Jokainen yksinkertainen suljettu polku näissä pisteruudukoissa voi yhdistää korkeintaan 24 pistettä, sillä lähtöpisteeseen palaavassa polussa on yhtä monta askelta oikealle ja vasemmalle sekä ylös ja alas, joten polun pituus on parillinen ja polku voi kulkea vain parillisen määrän pisteitä kautta. 4x4 neliöiden rajalla vaakasuorat osuudet voidaan kääntää pystysuoriksi, jolloin käyrä jakaantuu kokonaan 4x4 ruudukoissa oleviksi suljetuiksi käyriksi. Koska jokainen 4x4 ruudukon käyrä voi olla pituudeltaan korkeintaan 24 askelta, on pisimmän mahdollisen koko ruudukon suljetun käyrän pituus 5 ·24 =120 askelta.

7. Millä vakion a arvoilla suora $y = ax$ leikkaa käyrän $y = e^x$ täsmälleen yhdessä kohdassa.

Ratkaisu. Suora $y = ex$ on käyrän $y = e^x$ tangentti, ja tällöin suora sivuaa käyrää. Jos $a > e$ leikkauspisteitä on kaksi. Jos $0 \leq a < e$, ei leikkauspisteitä ole. Siis leikkauspisteitä on tasan yksi, kun $a < 0$.

8. Laske raja-arvo $\lim_{x\to1} \frac{\int_1^x \sqrt{1+4t^2}\,dt}{x-1}$.

Ratkaisu. Lauseke on muotoa "$\frac{0}{0}$", ja siihen voidaan soveltaa l'Hospitalin sääntöä, joten jos raja-arvo on olemassa, on se sama kuin derivaattojen raja-arvo. Osoittajan derivaatan laskemiseksi merkitään $g(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$. Koska g on jatkuva funktio, on sillä integraalifunktio G, jolla on integraalifunktion määritelmän mukaan ominaisuus $G'(t) = g(t)$. Siis osoittajaksi saadaan $\int_1^x \sqrt{1 + 4t^2}\,dt = G(x) - G(1)$, jolloin

$$\lim_{x\to1} \frac{\int_1^x \sqrt{1+4t^2}\,dt}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{d}{dx}(G(x)-G(1))}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{g(x)}{1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{1} = \sqrt{5}.$$

9. Olkoot f, f' ja f'' jatkuvia välillä $[0, \pi]$. Lisäksi tiedetään, että $f(0) = 1, f(\pi) = 3$ ja $\int_0^\pi f''(x)\sin(x)dx = \pi$. Laske $\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx$.

Ratkaisu. Osittaisintegroimalla kaksi kertaa saadaan

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx = \Big/_{0}^{\pi} f(x)\cdot(-\cos(x)) - \int_0^\pi f'(x)\cdot(-\cos(x))dx =$$

$$= -f(\pi)\cdot\cos(\pi) - (-f(0)\cdot\cos(0)) + \Big/_{0}^{\pi} f'(x)\cdot\sin(x) - \int_0^\pi f''(x)\sin(x)dx$$

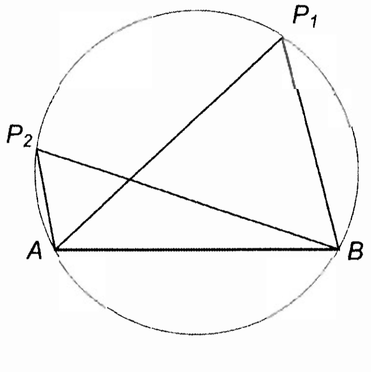
$$= -(-1)\cdot 3 + 1\cdot 1 + f'(\pi)\cdot\sin(\pi) - f'(0)\cdot\sin(0) - \pi = 4 - \pi.$$

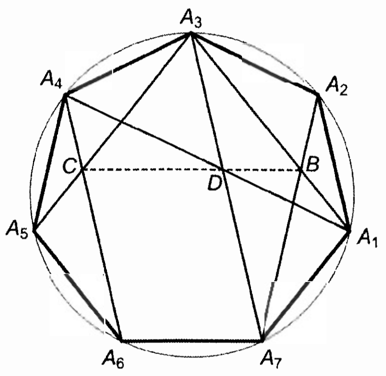
10. Olkoon $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ säännöllinen seitsenkulmio. Lävistäjät $\overline{A_1A_2}$ ja $\overline{A_2A_7}$ leikkaavat pisteessä B, lävistäjät $\overline{A_3A_5}$ ja $\overline{A_4A_6}$ leikkaavat pisteessä C ja lävistäjät $\overline{A_1A_4}$ ja $\overline{A_3A_7}$ leikkaavat pisteessä D. Osoita, että pisteet B, C ja D ovat samalla suoralla.

Ratkaisu.

Riittää näyttää, että $\angle BDA_1 = \angle CDA_4$. Tarkastellaan säännöllistä seitsenkulmiota $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ ja sen ympäri piirrettyä ympyrää. Säännöllisen seitsenkulmion sivua vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuria, joten myös kulmat $\angle BA_7D = \angle A_2A_7A_3$ ja $\angle BA_1D = \angle A_3A_1A_4$ ovat yhtä suuria. Koska nelikulmiossa BDA_7A_1 $\angle BA_7D = \angle BA_1D$, voidaan nelikulmion ympäri piirtää ympyrä. Tällöin myös kulmat $\angle BDA_1$ ja $\angle BA_7A_1 = \angle A_2A_7A_1$ ovat yhtä suuret eli $\angle BDA_1 = \angle A_2A_7A_1$.

Vastaavasti osoitetaan, että $\angle CA_4D = \angle A_6A_4A_1$ on sama kuin $\angle CA_3D = \angle A_5A_3A_7$, sillä molemmat kulmat ovat yhtä pitkiä kaaria $(A_5A_7 = A_6A_1)$ vastaavia kehäkulmia. Tällöin nelikulmion CDA_3A_4 ympäri voidaan piirtää ympyrä ja siksi $\angle CDA_4 = \angle CA_3A_4$. Mutta $\angle CA_3A_4 = \angle A_5A_3A_4 = \angle A_2A_7A_1$, joten $\angle BDA_1 = \angle A_2A_7A_1 = \angle A_5A_3A_4 = \angle CDA_4$, mikä oli osoitettava.





11. Tarkastellaan n lukua $x_1, \ldots, x_n$, joille on voimassa $0 < x_i < 1$ kaikille i ja $n > 1$. Osoita, että $2 < (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n) + (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) < 2^n$.

Ratkaisu. Kerrotaan sulut auki toisesta tulosta ja ryhmitellään termejä. Saadaan

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) = 1 + \underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}_{yksittäiset\ termit} + \underbrace{x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n}_{kahden\ termin\ tulot} + \cdots + \underbrace{x_1x_2 \cdots x_n}_{n\ termin\ tulo}.$$

Vastaavasti ensimmäistä tuloa muokkaamalla saadaan

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n) = 1 - \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}_{\text{yksittäiset termit}} + \underbrace{x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n}_{\text{kahden termin tulot}} - \cdots + (-1)^n \underbrace{x_1x_2 \cdots x_n}_{\text{n termin tulo}}$$

Kun tulot lasketaan yhteen parittoman määrän termejä sisältävät tulot kumoutuvat ja parillisen määrän termejä sisältävät tulot lasketaan kahdesti, joten saadaan

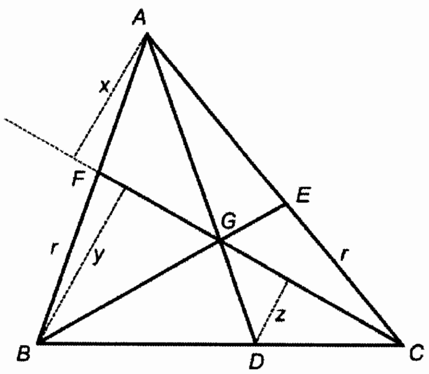
$$2 + 2\underbrace{(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad)}_{\text{parilliset tulot}}.$$

Koska $x_k > 0$, on saatu lauseke > 2. Toisaalta koska $x_k < 1$, lausekkeen arvo kasvaa, kun korvataan jokainen luvuista x_k luvulla 1, koska summassa on vain positiivisia termejä. Toisaalta alkuperäiseen lausekkeeseen sijoitettuna tulos on tasan 2^n, joten myös epäyhtälön toinen osa on voimassa.

12. Kolmion ΔABC sivujen pituudet ovat AB=9, BC=10 ja AC=11. Pisteet D, E ja F ovat sivuilla $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ ja $\overline{AB}$ siten, että janat $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ ja $\overline{CF}$ leikkaavat kuvan mukaisesti pisteessä G. Lisäksi tiedetään, että BF=CE ja AG:DG = 2 : 1. Määritä janan BF pituus.

Ratkaisu

Olkoon $r = BF = CE$. Olkoot x, y ja z pisteiden A, B ja D etäisyydet suorasta CF. Yhdenmuotoisista komioista saadaan $\frac{AF}{BF} = \frac{x}{y}$, $\frac{CD}{BC} = \frac{z}{y}$ ja $\frac{DG}{AG} = \frac{z}{x}$. Tällöin $\frac{CD}{BC} = \frac{DG}{AG} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9-r}{r}$. Vastaavasti tarkastelemalla pisteiden A, C ja D etäisyyksiä suorasta BE saadaan $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11-r}{r}$. Laskemalla yhteen saadaan $\frac{CD}{BC} + \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{9-r}{r} + \frac{11-r}{r})$, joten $2r = 20 - 2r$ ja $BF = CE = r = 5$.



13. Määritellään lukujono $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ rekursiivisesti asettamalla $a_1 = 2$ ja $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, kun $n \geq 1$. Osoita, että jonosta ei löydy kahta erisuurta jäsentä, joilla olisi lukua 1 suurempi yhteinen tekijä.

Ratkaisu Osoitetaan ensin induktiolla, että $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_1 + 1$, kaikille $n \geq 2$. Koska $a_2 = a_1^2 - a_1 + 1 = 2^2 - 2 + 1 = 3$ ja $a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$ kaava pätee, kun $n = 2$. Oletetaan, että $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_1 + 1$. Tällöin $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 = a_n(a_n - 1) + 1 = a_n(a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_1 + 1 - 1) + 1 = a_n a_{n-1} \cdots a_1 + 1$, ja kaava pätee induktioperiaatteen nojalla kaikilla $n \geq 2$.

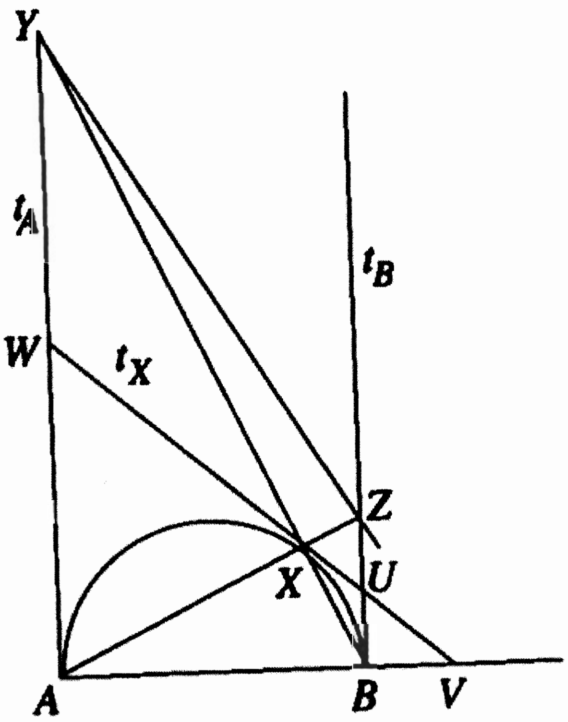
Oletetaan, että kokonaisluku $d > 1$ on sekä luvun a_n että a_{n+k} tekijä, missä k≥ 1. Tällöin d on myös erotuksen $a_{n+k} - a_{n+k-1} \cdots a_n \cdots a_1 = 1$ tekijä, mikä on mahdotonta. Siis jonon jäsenillä ei ole lukua 1 suurempaa yhteistä tekijää.

14. Olkoon AB ympyrän halkaisija ja olkoon X≠A,B ympyrä piste. Olkoot edelleen t_A, t_B ja t_X pisteisiin A, B ja X piirretyt ympyrän tangentit. Janan AX jatke leikkaa tangentin t_B pisteessä Z ja janan BX jatke leikkaa tangentin t_A pisteessä Y. Osoita, että suorat YZ, t_x ja AB joko kulkevat saman pisteen kautta tai ovat yhdensuuntaiset.

Ratkaisu. Jos X sijaitsee niin, että AX=BX, niin tällöin t_x on janan AB suuntainen. Lisäksi $\Delta AXY \cong \Delta BXZ$ (AX=BX,$\angle YXA = \angle ZXB = 90°, \angle YAX = \angle XBZ = 45°$), joten AY=BZ ja YZ ja AB ovat yhdensuuntaiset.

Olkoon AX ≠ BX. Tällöin t_x leikkaa suorat AB, BZ ja ja AY pisteissä V, U ja W. Koska $\angle AXB = 90°$, $\angle AXY = 90°$ ja $\angle AYX + \angle YAX = 90° = \angle WXY + \angle WXA$ (1). Koska t_x ja t_A ovat samasta pisteestä W piirrettyjä tangentteja, niin WA=WX ja siksi $\angle YAX = \angle WXA$. Nyt kaavasta (1) saadaan $\angle AYX = \angle WXY$, joten WY=WX=WA ja W on janan AY keskipiste. Samoin voidaan päätellä, että U on janan ZB keskipiste.

Olkoon Z' janan VY ja tangentin t_B leikkauspiste. Koska VW puolittaa janan AY ja koska AY | | BZ', niin jana VW puolittaa janan BZ'. Tällöin BZ'=2BU=BZ ja Z=Z' ja janat YZ, WU ja AB leikkaavat pisteessä V.



15. Positiivisen kokonaisluvun $x = d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0$ sanotaan oleva erityinen, jos luvun kymmenjärjestelmäesityksen numerot toteuttavat ehdot $d_n \le d_{n-1} \le \cdots \le d_1 \le d_0 = 5$. Esimerkiksi luvut 15 ja 225 ovat erityisiä. Osoita, että on olemassa äärettömän monta kokonaislukua x, joille sekä x että x^2 ovat erityisiä.

Ratkaisu

Huomataan aluksi, että luvut x=35 ja x^2=1225 ovat erityisiä samoin luvut 335 ja 3335 ja niiden neliöt 112225 ja 11122225. Osoitetaan, että luvut x=33...335 ja x^2 ovat erityisiä, joten on olemassa ääretön määrä erityisiä lukuja, joiden neliö on erityinen luku.

Huomataan, että koska $10^k - 1 = \underbrace{99\ldots99}_{k}$, niin $\frac{10^k-1}{3} = \underbrace{33\ldots33}_{k}$ ja $\frac{10^k-1}{9} = \underbrace{11\ldots11}_{k}$ kaikilla $k \ge 1$. Olkoon x erityuinen luku $x = \underbrace{33\ldots335}_{k} = \underbrace{33\ldots333}_{k} + 2 = \frac{10^k-1}{3} + 2 = \frac{10^k+5}{3}$, kaikilla $k \ge 2$. Tällöin

$$x^2 = \left(\frac{10^k+5}{3}\right)^2 = \frac{10^{2k} + 2\cdot 5\cdot 10^k + 25}{9} = \frac{10^{2k} + 10^{k+1} + 25}{9} = \frac{10^{2k}-1}{9} + \frac{10^{k+1}-1}{9} + 3$$
$$= \underbrace{11\ldots11}_{2k} + \underbrace{11\ldots11}_{k+1} + 3 = \underbrace{11\ldots11}_{k-1}\underbrace{22\ldots22}_{k}5$$

koska 2k > k+1. Siis myös x^2 on erityinen luku.

16. Määritä kulman x suuruus. Huomaa, että yllä olevan kuvan suhteet eivät ole oikein.

Ratkaisu.

Kolmion kulmien summa on 180°, joten saadaan

∠ACB = 180°-(10°+70°)-(60°+20°) = 20° ja ∠AEB = 180°-70°-(60°+20°) = 30°.

Piirretään pisteestä D janan AB suuntainen suora. Olkoon suoran ja kyljen BC leikkauspiste F. Tällöin

ΔDCF ~ ΔACB

∠CFD = ∠CBA = 60°+20° = 80°

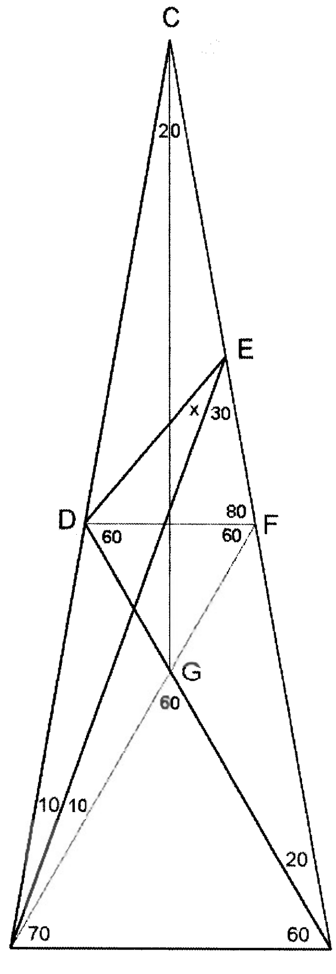
∠DFB = 180°-80° = 100°

∠CDF = ∠CAB = 70°+10° = 80°

∠ADF = 180°-80° = 100°

∠BDF = 180°-100°-20° = 60°

Piirretään jana FA. Olkoon janojen FA ja DB leikkauspiste G.



ΔADF $\cong$ ΔBFD

$\angle$AFD = $\angle$BDF = 60°

$\angle$DGF = 180°-60°-60° = 60° = $\angle$AGB

$\angle$GAB = 180°-60°-60° = 60°

ΔDFG kaikki kulmat ovat 60°, joten kolmio on tasasivuinen.

ΔAGB kaikki kulmat ovat 60°, joten kolmio on tasasivuinen

Kolmiossa ΔCFA on kaksi 20° kulmaa, joten kolmio on tasakylkinen ja FC = FA

Piirretään suora CG, joka puolittaa kulman $\angle$ACB. Tällöin

ΔACG $\cong$ ΔCAE

FC-CE = FA-AG = FE = FG

FG = FD, joten FE = FD

Kolmio ΔDFE on tasakylkinen, joten

$\angle$DEF = 30°+x = (180°-80°)/2 = 50°, ja siten x = 20°

17. Rationaaliluku voidaan kirjoittaa kahden kokonaisluvun osamääränä. Oletetaan, että a, b ja c ovat positiivisia rationaalilukuja ja että myös $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ on rationaalinen. Osoita, että luvut $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ ja $\sqrt{c}$ ovat rationaalisia.

Ratkaisu. Rationaalilukujen joukko on suljettu yhteenlaskun, vähenyslaskun, ketolaskun ja jakolaskun suhteen (nollalla ei tietenkään saa jakaa). Kirjoitetaan $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=r$, missä $r>0$ on rationaalinen. Ratkaistaan $\sqrt{a}+\sqrt{b}=r-\sqrt{c}$. Neliöimällä saadaan $a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b=r^2-2r\sqrt{c}+c$. Ratkaistaan edelleen $\sqrt{ab}=s-r\sqrt{c}$, missä s on rationaaliluku $s=(r^2+c-a-b)/2\neq 0$. Neliöimällä saadaan $ab=s^2-2rs\sqrt{c}+r^2c$ ja edelleen, koska $r\neq 0\ ja\ s\neq 0$ saadaan $\sqrt{c}=(s^2+r^2c-ab)/2rs$ eli $\sqrt{c}$ on rationaalinen. Vastaavasti näytetään, että myös $\sqrt{a}$ ja $\sqrt{b}$ ovat rationaalisia.

18. Kaikki kokonaisluvut $n>1000$ jaetaan kahteen joukkoon A ja B. Osoita, että vähintään yhdessä joukoista on kaksi eri suurta numeroa x ja y siten, että myös niiden summa x+y kuuluu samaan joukkoon.

lukua

Ratkaisu. Joukoista A ja B ainakin toisen on oltava ääretön, joten voidaan olettaa, että joukossa A on ääretön määrä alkioita. Valitaan joukosta A kaksi eri alkiota u ja v. Koska A on ääretön, on olemassa joukon A alkio w, jolle on voimassa w > 2u+v+1000. Jos edes toinen luvuista v+u tai v+w on joukossa A, vaaditut luvut on löydetty. Siis voidaan olettaa, että molemmat luvuista ovat joukossa B. Tarkastellaan lukua w-u. Koska w>2u+v+1000, on w-u>1000 ja myös w-u>u ja w-u>u+v. Nyt siis w-u on joko joukon A tai joukon B alkio. Oletetaan ensin, että w-u on joukossa A. Tällöin w-u ja u ovat kaksi joukon A eri alkiota ja (w-u) +u = w on myös joukon A alkio. Jos taas w-u on joukon B alkio, niin w-u ja u+v ovat kaksi joukon B alkiota ja (w-u)+(u+v) =w+v on myös joukon B alkio.

19. Suorakulmaisen kolmion AOB suora kulma on kärjessä O ja pisteet A ja B sijaitsevat paraabelilla $y^2 = 4ax, a > 0$. Osoita, että kaikilla janoilla AB on yhteinen piste. Määritä tämä piste.

Ratkaisu. Symmetrian vuoksi yhteinen piste on x-akselilla. Osoitetaan, että jänteiden ja x-akselin leikkauspiste ei riipu jänteen päätepisteistä. Olkoot jänteiden päätepisteet (x_1,y_1) ja (x_2,y_2) ja jänteen ja x-akselin leikkauspiste $(x_0,0)$. Koska jänteet kulkevat myös origon kautta ja ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, saadaan $\frac{y1}{x1}\cdot\frac{y2}{x2} = -1$ ja edelleen $y1y2 + x1x2 = 0$. Koska jänteiden päätepisteet ovat paraabelilla, pätee $y_1^2=4ax_1$ ja $y_2^2=4ax_2$. Yhdistämällä saadaan $(y_1y_2)^2 = 16a^2x_1x_2 = -16a^2y_1y_2$, joten $y_1y_2 = -16a^2$.

Jänne leikkaa x-akselin pisteessä $x_0 = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2} = \frac{\frac{y_2^2}{4a}y_1-\frac{y_1^2}{4a}y_2}{y_1-y_2} = \frac{\frac{-16a^2}{4a}y_2-\frac{-16a^2}{4a}y_1}{y_1-y_2} = \frac{4a(y_1-y_2)}{y_1-y_2} = 4a$, mikä ei riipu jänteen päätepisteistä.

20. Lukujono $A_1, A_2, \ldots$ määritellään rekursiivisesti asettamalla $A_{n+1} = \frac{A_n}{1+nA_n}$, kun $n = 0,1,2,\ldots$ ja $A_0 = A$. Määritä lukujonon termi A_{2016}.

Ratkaisu Nyt koska $\frac{1}{A_{n+1}} - \frac{1}{A_n} = \frac{1}{\frac{A_n}{1+nA_n}} - \frac{1}{A_n} = \frac{1+nA_n-1}{A_n} = n$ saadaan

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_0} = 0$$
$$\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} = 1$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{A_{2016}} - \frac{1}{A_{2015}} = 2015$$

Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $\frac{1}{A_{2016}} - \frac{1}{A_0} = 0 + 1 + \cdots + 2015 = \frac{0+2015}{2}\cdot 2016 = 2015\cdot 1008$, joten $\frac{1}{A_{2016}} = \frac{1}{A} + 2031120$ ja $A_{2016} = \frac{A}{1+2031120A}$.