Epäyhtälöiden kieltämätön viehätys

Lyhyt opastettu kierros algebrallisten epäyhtälöiden viidakkoon

Paul Vaderlind, Tukholman yliopisto

Englanninkielisestä alkuperäistekstistä kääntänyt Esa V. Vesalainen.

Sisällysluettelo

Johdanto

Tämä on yhdentoista tärkeimmän algebrallisen epäyhtälön luettelo yhdessä lukuisten esimerkkien ja tehtävien kanssa. Epäyhtälöt esitetään yksinkertaisessa muodossa: niitä kaikkia voi vahvistaa ja yleistää. Muotoilujen valinnassa on ajateltu niiden soveltuvuutta ongelmien ratkaisuun matematiikkakilpailuissa. On myös hyvä huomata, etteivät tässä tekstissä esitetyt epäyhtälöt ole millään muotoa toisistaan riippumattomia. Esimerkiksi Hölderin epäyhtälö seuraa Jensenin epäyhtälöstä, sekä Cauchyn–Schwarzin että Tšebyšovin epäyhtälöt voidaan johtaa uudelleenjärjestysepäyhtälöstä, ja niin edelleen. Siitä huolimatta erilaisten sovellustapojensa vuoksi nämä epäyhtälöt ansaitsevat tulla mainituiksi erikseen.

Tekstissä esitellään seuraavat epäyhtälöt:

aritmeettis-geometris-harmoninen epäyhtälö,
Tšebyšovin epäyhtälö,
uudelleenjärjestysepäyhtälö,
Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö,
Hölderin epäyhtälö,
Minkowskin epäyhtälö,
Jensenin epäyhtälö,
potenssikeskiarvojen epäyhtälö,
Schurin epäyhtälö,
MacLaurinin epäyhtälö,
Muirheadin epäyhtälö.

Epäyhtälöt

Aritmeettis-geometris-harmoninen epäyhtälö

Olkoot a_1, a_2, …, a_n positiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

missä yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin kun $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Tämä on luultavasti tunnetuin kaikista epäyhtälöistä ja se on erittäin hyödyllinen monenlaisissa tilanteissa. Toisaalta se on vain erikoistapaus monista myöhemmin esiteltävistä epäyhtälöistä.

Esimerkki. (Iso-Britannia, 2000) Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja, joille $xyz = 32$. Etsi lausekkeen $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4z^2$ pienin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. Soveltamalla aritmeettis-geometrista epäyhtälöä kahdesti huomaamme, että

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 &= \left(x^2 + 4y^2\right) + 4xy + 2z^2 \geqslant 2\sqrt{x^2 \cdot 4y^2} + 4xy + 2z^2 \\ &= 4xy + 4xy + 2z^2 \geqslant 3\sqrt[3]{32\,x^2y^2z^2} = 3\sqrt[3]{32^3} = 96. \end{aligned}$$

Yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin kun pätee $x^2 = 4y^2$ ja $4xy = 2z^2$, eli kun $x = z = 4$ ja $y = 2$.

Esimerkki. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset, 1964) Olkoot a, b ja c kolmion sivut. Osoita, että

$$a^2\,(b + c - a) + b^2\,(c + a - b) + c^2\,(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

Ratkaisu. Olkoot $x = a + b - c$, $y = b + c - a$ ja $z = c + a - b$. Tällöin x, y ja z ovat positiivisia ja todistettava epäyhtälö muuttuu muotoon

$$\left(\frac{z + x}{2}\right)^2 \cdot y + \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \cdot z + \left(\frac{y + z}{2}\right)^2 \cdot x \leqslant \frac{3}{8}\,(z + x)(x + y)(y + z)\,.$$

Tämä epäyhtälö sievenee muotoon

$$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 \geqslant 6xyz,$$

joka pätee koska aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 \geqslant 6\sqrt[6]{x^6y^6z^6} = 6xyz.$$

Yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin kun $x = y = z$, eli täsmälleen silloin kun alkuperäinen kolmio on tasasivuinen.

Esimerkki. Olkoon yhtälöllä $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ neljä positiivista reaalijuurta. Osoita, että

$$pr - 16s \geqslant 0, \quad \text{ja että} \quad q^2 - 36s \geqslant 0.$$

Ratkaisu. Olkoot x_1, x_2, x_3 ja x_4 yhtälön juuret. Silloin tunnetusti

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = q, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -r, \quad \text{ja} \\ x_1x_2x_3x_4 = s. \end{cases}$$

Käyttämällä aritmeettis-harmonista epäyhtälöä saamme

$$pr = \sum_{\ell=1}^{4} x_\ell \cdot \sum_{\ell=1}^{4} \frac{1}{x_\ell} \cdot x_1x_2x_3x_4 \geqslant 16s.$$

Toisaalta, aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä saamme

$$q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \geqslant 6\sqrt[6]{x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3} = 6\sqrt{s}.$$

Esimerkki. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset, 1999) Olkoon $n \geqslant 2$ kiinteä kokonaisluku. Etsi pienin reaalivakio C jolle kaikilla ei-negatiivisilla reaaliluvuilla x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1} ja x_n pätee

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \leqslant C \left(\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\right)^4.$$

Selvitä myös milloin tässä vallitsee yhtäsuuruus.

Ratkaisu. Seuraava on yllätysratkaisu, jonka eräs Kiinan joukkueen kilpailija löysi kilpailun *jälkeen*. Se vaatii vain yhden, tosin vaativan, aritmeettis-geometrisen epäyhtälön sovelluksen.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\right)^4 &= \left(\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j\right)^2 \geqslant 4\left(\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2\right)\left(2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j\right) \\ &= 8\left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2\right) \geqslant 8 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right). \end{aligned}$$

Toisessa epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $n-2$ kappaletta luvuista x_ℓ ovat nollia. Olettakaamme siis, että $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$. Tällöin ensimmäisen epäyhtälön muuttuminen yhtäsuuruudeksi edellyttää sitä, että

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\right)^2 = 8\left(x_1^2 + x_2^2\right) x_1 x_2,$$

mikä taas palautuu yhtälöön $(x_1 - x_2)^4 = 0$. Täten $x_1 = x_2$. Tehtävän vastaus on siis $C = \frac{1}{8}$, ja yhtäsuuruus vallitsee täsmälleen silloin kun kaksi muuttujista x_ℓ ovat yhtä suuria loput häviävät.

Tšebyšovin epäyhtälö

Olkoot a_1, a_2, …, a_{n-1} ja a_n sekä b_1, b_2, …, b_{n-1} ja b_n kaksi reaalilukujen jonoa, joista ainakin toinen koostuu pelkästään positiivisista reaaliluvuista. Oletetaan lisäksi, että $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ ja $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Tällöin

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}.$$

Jos sen sijaan oletamme, että $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ ja $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, niin epäyhtälö pätee toisin päin. Yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos ainakin toinen jonoista on vakiojono.

Esimerkki. Olkoot a_1, a_2, …, a_{n-1} ja a_n positiivisia reaalilukuja, ja olkoon A niiden aritmeettinen keskiarvo. Osoita, että

$$\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \left(a_\ell + \frac{1}{a_\ell} \right)^2 \geqslant \left(A + \frac{1}{A} \right)^2.$$

Ratkaisu. Neliöimällä epäyhtälön molemmat puolet se saa ekvivalentin muodon

$$\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^2 + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{a_\ell^2} \geqslant A^2 + \frac{1}{A^2}.$$

Osoitamme tämän kahdessa osassa.

Voimme ilman yleisyyden menettämistä olettaa, että jono a_1, a_2, …, a_n on kasvava. Tällöin jono $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, …, $\frac{1}{a_n}$ on laskeva ja käyttämällä Tšebyšovin epäyhtälöä kahdesti saamme, että

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{a_\ell^2} \cdot A^2 &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{a_\ell^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \cdot \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \\ &\geqslant \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{a_\ell} \cdot \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \geqslant \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} 1 = 1. \end{aligned}$$

Tšebyšovin epäyhtälö antaa myös tuloksen

$$\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^2 \geqslant \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \cdot \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell.$$

Nämä kaksi tulosta yhdessä antavat halutun epäyhtälön.

Esimerkki. Olkoon b_1, b_2, …, b_{n-1} ja b_n positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{b_\ell} \right)^2 \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^2 \geqslant n^3.$$

Ratkaisu. Voimme kirjoittaa halutun epäyhtälön muodossa

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{b_\ell}\cdot\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{b_\ell}\cdot\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell^2 \geqslant 1.$$

Symmetrian vuoksi voimme olettaa, että jono b_1, b_2, $\dots$, b_n on kasvava, jolloin jono $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{b_2}$, $\dots$, $\frac{1}{b_n}$ on vähenevä. Käyttämällä Tšebyšovin epäyhtälöä kahdesti, ensin kahteen jälkimmäiseen multiplikandiin, saamme, että

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{b_\ell}\cdot\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{b_\ell}\cdot\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell^2 \geqslant \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{b_\ell}\cdot\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell \geqslant \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}1 = 1.$$

Esimerkki. (Intia, 1995) Olkoon n lukua 1 suurempi kokonaisluku ja olkoot a_1, a_2, $\dots$, a_n sellaisia positiivisia reaalilukuja, että niiden summa on yksi. Osoita, että

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+\dots+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Ratkaisu. Voimme jälleen olettaa, että jono a_1, a_2, $\dots$, a_n on kasvava, jolloin jono $\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{1-a_2}}$, $\dots$, $\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}$ on myös kasvava. Tšebyšovin epäyhtälön nojalla siis

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{\sqrt{1-a_2}}&+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+\dots+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}}\\
&\geqslant \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-a_2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-a_2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}\right).
\end{aligned}$$

Nyt voimme käyttää edellisessä esimerkissä todistettua tulosta. Nimittäin, jos asetamme $b_\ell = \frac{1}{\sqrt{1-a_\ell}}$ kullekin $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$, niin

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell\right)^2 \geqslant n\left(\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell^{-2}\right)^{-1} = \frac{n}{n-1}.$$

Täten

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-a_2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}\right) \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$.

Uudelleenjärjestysepäyhtälö

Olkoot $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ ja $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_n$ reaalilukuja. Jokaisella lukujen a_1, a_2, $\dots$, a_n permutaatiolla a'_1, a'_2, $\dots$, a'_n pätee epäyhtälö

$$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n \geqslant a'_1b_1+a'_2b_2+\dots+a'_nb_n \geqslant a_nb_1+a_{n-1}b_2+\dots+a_1b_n.$$

Jos vaikkapa $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, niin ensimmäisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $a'_1 = a_1$, $a'_2 = a_2$, $\ldots$, $a'_n = a_n$, ja jälkimmäisessä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $a'_1 = a_n$, $a'_2 = a_{n-1}$, $\ldots$, $a'_n = a_1$. Jos merkitsemme

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$

niin suuruusjärjestysepäyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.$$

Tämä viattoman näkoinen ja helposti todistettava epäyhtälö on itse asiassa varsin voimakas työkalu ja siitä voidaan johtaa monta muuta epäyhtälöä. Suuruusjärjestysepäyhtälö on toinen kirjoittajan suosikeista. Toinen niistä on Muirheadin epäyhtälö.

Esimerkki. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset, 1975) Oletetaan, että $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ ja $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ ovat reaalilukuja, ja oletetaan, että z_1, z_2, $\ldots$, z_n ovat luvut y_1, y_2, $\ldots$, y_n jossakin järjestyksessä. Osoita, että

$$\sum_{\ell=1}^{n} (x_\ell - y_\ell)^2 \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} (x_\ell - z_\ell)^2 .$$

Ratkaisu. Kun epäyhtälön termit kertoo auki ja yhtäsuuret termit supistaa pois, jäljelle jää vain epäyhtälö

$$\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell y_\ell \geqslant \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell z_\ell,$$

mikä on oleellisesti ottaen suuruusjärjestysepäyhtälö.

Esimerkki. Osoita kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b ja c epäyhtälö

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Ratkaisu. Symmetrian vuoksi voimme olettaa, että $a \geqslant b \geqslant c$. Tällöin suuruusjärjestysepäyhtälöstä seuraa, että

$$\begin{aligned} \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} &= \begin{bmatrix} a^5 & b^5 & c^5 \\ \frac{1}{b^3c^3} & \frac{1}{c^3a^3} & \frac{1}{a^3b^3} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a^5 & b^5 & c^5 \\ \frac{1}{c^3a^3} & \frac{1}{a^3b^3} & \frac{1}{b^3c^3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{c^3} & \frac{1}{a^3} & \frac{1}{b^3} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{b^3} & \frac{1}{c^3} \end{bmatrix} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Esimerkki. Osoita kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b ja c epäyhtälö

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Ratkaisu. Symmetrian vuoksi voimme jälleen olettaa, että $a \geqslant b \geqslant c$. Tällöin

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{bmatrix}.$$

Nyt haluttu tulos seuraa laskemalla nämä kaksi epäyhtälöä yhteen ja käyttämällä helposti todistettavaa epäyhtälöä

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geqslant \frac{x + y}{2},$$

joka pätee kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x ja y.

Esimerkki. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset, 1983) Olkoot a, b ja c kolmion sivut. Osoita, että

$$a^2 b\,(a - b) + b^2 c\,(b - c) + c^2 a\,(c - a) \geqslant 0.$$

Ratkaisu. Voimme olettaa, että $a \geqslant \max\{b, c\}$. Jos $a \geqslant b \geqslant c$, niin osoitamme ensin, että

$$a\,(b + c - a) \leqslant b\,(c + a - b) \leqslant c\,(a + b - c)\,.$$

Ensimmäinen näistä epäyhtälöistä seuraa siitä, että

$$b\,(c + a - b) - a\,(b + c - a) = (a - b)\,(a + b - c) \geqslant 0,$$

ja jälkimmäinen palautuu siihen, että

$$(b - c)\,(b + c - a) \geqslant 0,$$

mikä on myös selvää kolmioepäyhtälön nojalla.

Jakamalla todistettavan epäyhtälön tulolla abc saamme sen yhtäpitävään muotoon

$$\frac{1}{c} \cdot a\,(a - b) + \frac{1}{a} \cdot b\,(b - c) + \frac{1}{b} \cdot c\,(c - a) \geqslant 0,$$

ja vähentämällä puolittain summan $a + b + c$ saamme epäyhtälön

$$\frac{1}{c} \cdot a\,(-c + a - b) + \frac{1}{a} \cdot b\,(-a + b - c) + \frac{1}{b} \cdot c\,(-b + c - a) \geqslant -\,(a + b + c)\,.$$

Todistettava epäyhtälö voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{c} \cdot a\,(c - a + b) + \frac{1}{a} \cdot b\,(a - b + c) + \frac{1}{b} \cdot c\,(b - c + a) \leqslant a + b + c.$$

Lopuksi suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c} \cdot a\,(c - a + b) + \frac{1}{a} \cdot b\,(a - b + c) + \frac{1}{b} \cdot c\,(b - c + a) \\ &\quad = \begin{bmatrix} a\,(c - a + b) & b\,(a - b + c) & c\,(b - c + a) \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \\ &\quad \leqslant \begin{bmatrix} a\,(c - a + b) & b\,(a - b + c) & c\,(b - c + a) \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{bmatrix} = a + b + c. \end{aligned}$$

Kun $a \geqslant c \geqslant b$, todistus on samankaltainen.

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö

Kaikille reaaliluvuille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pätee

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right),$$

ja tässä pätee yhtäsuuruus jos ja vain jos löytyy kaksi reaalilukua α ja β, jotka eivät molemmat ole nollia, siten, että $\alpha a_\ell = \beta b_\ell$ kaikilla $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Esimerkki. (Iran, 1998) Olkoot x, y ja z sellaisia lukua yksi suurempia reaalilukuja, että $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Osoita, että

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Ratkaisu. Oletusten nojalla

$$\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 1.$$

Siispä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} x+y+z & \\ &= \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\right)\left(\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{y-1}{y}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{z-1}{z}}\right)^2\right) \\ &\geqslant \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}\right)^2, \end{aligned}$$

mistä haluttu epäyhtälö seuraa suoraan.

Esimerkki. (Romania, 1999) Olkoon $n \geqslant 2$ kokonaisluku ja tarkastellaan kahta sellaista kokoelmaa positiivisia reaalilukuja x_1, x_2 $\ldots$, x_n sekä y_1, y_2, $\ldots$, y_n, että

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Osoita, että

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}.$$

Ratkaisu. Soveltamalla ensin Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä ja sitten tehtävän oletusta, saamme

$$\left(\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\right)^2 \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell y_\ell \cdot \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x_\ell}{y_\ell} \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \cdot \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x_\ell}{y_\ell}.$$

Saamme tästä halutun epäyhtälön jakamalla puolittain summalla $\sum\limits_{\ell=1}^{n} x_\ell$.

Esimerkki. (Neuvostoliitto, 1986) Olkoot a_1, a_2, $\ldots$, a_n positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \frac{3}{a_1+a_2+a_3} + \ldots + \frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} < 2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Ratkaisu. Merkitään kullekin $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$S_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} a_k, \quad \text{ja} \quad A_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{k^2}{a_k}.$$

Käyttämällä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä saamme, että

$$\left(\frac{\ell(\ell+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{\ell} \frac{k}{\sqrt{a_k}} \cdot \sqrt{a_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\ell} \frac{k^2}{a_k} \cdot \sum_{k=1}^{\ell} a_k = A_\ell S_\ell.$$

Täten

$$\frac{\ell}{S_\ell} \leqslant \frac{4\ell A_\ell}{\ell^2(\ell+1)^2} < \frac{(4\ell+2)A_\ell}{\ell^2(\ell+1)^2} = \left(\frac{2}{\ell^2} - \frac{2}{(\ell+1)^2}\right) A_\ell.$$

Laskemalla nämä yhteen kaikkien indeksin ℓ arvojen yli, saamme

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell}{S_\ell} &\leqslant \sum_{\ell=1}^{n} \frac{2}{\ell^2} \cdot A_\ell - \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{2}{\ell^2} \cdot A_{\ell-1} \\
&= \frac{2}{a_1} + \sum_{\ell=2}^{n} \frac{2}{\ell^2}(A_\ell - A_{\ell-1}) - \frac{2}{(n+1)^2} \cdot A_n \\
&= 2\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{a_\ell} - \frac{2}{(n+1)^2} \cdot A_n < 2\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{a_\ell}.
\end{aligned}$$

Hölderin epäyhtälö

Olkoot p ja q kaksi positiivista reaalilukua, joiden käänteislukujen summa on yksi, ja olkoot a_1, a_2, ... ja a_n sekä b_1, b_2, ... ja b_n positiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell b_\ell \leqslant \sqrt[p]{\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^p} \sqrt[q]{\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^q},$$

ja tässä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos on olemassa kaksi reaalilukua α ja β, jotka eivät molemmat ole nollia, siten että $\alpha a_\ell^p = \beta b_\ell^q$ jokaisella $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Tämä yleistyy helposti useammallekin kuin yhdelle lukusarjalle: Olkoon $a_{k\ell}$ positiivinen reaaliluku kaikilla $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ja olkoot p_1, p_2, ..., p_m positiivisia reaalilukuja joiden käänteislukujen summa on yksi. Tällöin

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{1\ell} a_{2\ell} \cdots a_{m\ell} \leqslant \sqrt[p_1]{\sum_{\ell=1}^{n} a_{1\ell}^{p_1}} \sqrt[p_2]{\sum_{\ell=1}^{n} a_{2\ell}^{p_2}} \cdots \sqrt[p_m]{\sum_{\ell=1}^{n} a_{m\ell}^{p_m}}.$$

Esimerkki. (Valko-Venäjä, 2000) Todista, että kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a, b, c, x, y ja z vallitsee epäyhtälö

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Ratkaisu. Käytämme Hölderin epäyhtälöstä sitä muotoa, joka yllä käytetyin merkinnöin vastaa sitä tapausta jossa $m = 3$ ja $p_1 = p_2 = \ldots = p_m = \frac{1}{m}$: kaikille positiivisille reaaliluvuille p_1, p_2 p_3, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 ja r_3 pätee

$$p_1p_2p_3 + q_1q_2q_3 + r_1r_2r_3 \leqslant \prod_{\ell=1}^{3} \sqrt[3]{p_\ell^3 + q_\ell^3 + r_\ell^3}.$$

Siispä

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z}}\,\sqrt[3]{1+1+1}\,\sqrt[3]{x+y+z} \geqslant a + b + c.$$

Saamme nyt halutun epäyhtälön kuutioimalla tässä molemmat puolet ja jakamalla puolittain lausekkeella $3\,(x + y + z)$.

Esimerkki. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^6b^3 + b^6c^3 + c^6d^3 + d^6a^3 \geqslant a^2b^5c^2 + b^2c^5d^2 + c^2d^5a^2 + d^2a^5b^2.$$

Ratkaisu. Merkitään $x = \left(a^2b\right)^3$, $y = \left(b^2c\right)^3$, $z = \left(c^2d\right)^3$ ja $w = \left(d^2a\right)^3$. Näillä merkinnöillä

$$\begin{aligned} a^6b^3 + b^6c^3 + c^6d^3 + d^6a^3 &= \left(\sqrt[3]{x+y+z+w}\right)^3 \\ &= \sqrt[3]{x+y+z+w}\,\sqrt[3]{y+z+w+x}\,\sqrt[3]{y+z+w+x} \\ &\geqslant \sqrt[3]{xy^2} + \sqrt[3]{yz^2} + \sqrt[3]{zw^2} + \sqrt[3]{wx^2} \\ &= a^2b^5c^2 + b^2c^5d^2 + c^2d^5a^2 + d^2a^5b^2. \end{aligned}$$

Minkowskin epäyhtälö

Olkoot annetut reaaliluku $r \geqslant 1$ sekä positiiviset reaaliluvut a_1, a_2, $\ldots$, a_n ja b_1, b_2 $\ldots$, b_n. Tällöin

$$\sqrt[r]{\sum_{\ell=1}^{n} \left(a_\ell + b_\ell\right)^r} \leqslant \sqrt[r]{\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^r} + \sqrt[r]{\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^r},$$

missä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos löytyy kaksi reaalilukua α ja β, jotka eivät molemmat häviä, ja joille $\alpha a_\ell = \beta b_\ell$ jokaisella $\ell \in \left\{1, 2, \ldots, n\right\}$.

Kun $r \in \left]0, 1\right[$ sama epäyhtälö pätee mutta vastakkaiseen suuntaan. Jälleen on selvää, että tämänkin epäyhtälön voi yleistää useammalle kuin kahdelle lukusarjalle.

Esimerkki. Osoita, että kaikille ei-negatiivisille reaaliluvuille x, y ja z pätee

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \geqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right).$$

Ratkaisu. Valitsemalla Minkowskin epäyhtälön muotoilussamme $r = 2$, sekä $a_1 = \sqrt{x}$, $a_2 = \sqrt{y}$ ja $a_3 = \sqrt{z}$, voimme käyttää Minkowskin epäyhtälöä suoraviivaisella tavalla:

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{a_3^2 + a_1^2} &\geqslant \sqrt{\left(a_1 + a_2 + a_3\right)^2 + \left(a_2 + a_3 + a_1\right)^2} \\ &= \sqrt{2}\left(a_1 + a_2 + a_3\right). \end{aligned}$$

Esimerkki. Olkoot a_1, a_2, $\ldots$, a_n sellaisia positiivisia reaalilukuja että niiden tulo on yksi. Olkoot $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$, $\langle c_1, c_2, \ldots, c_n\rangle$ sekä $\langle d_1, d_2, \ldots, d_n\rangle$ kolme jonon $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ permutaatiota. Osoita, että

$$\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{a_\ell + b_\ell + c_\ell + d_\ell} \geqslant 2n.$$

Ratkaisu. Minkowskin epäyhtälön nojalla

$$\left(\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{a_\ell + b_\ell + c_\ell + d_\ell}\right)^2 \geqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{a_\ell}\right)^2 + \left(\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{b_\ell}\right)^2$$
$$+ \left(\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{c_\ell}\right)^2 + \left(\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{d_\ell}\right)^2 = 4\left(\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{a_\ell}\right)^2.$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{a_\ell} \geqslant n \sqrt[n]{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\sqrt{a_n}} = n \sqrt[2n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = n.$$

Yhdistämällä saadut kaksi epäyhtälöä näemme, että

$$\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{a_\ell + b_\ell + c_\ell + d_\ell} \geqslant 2n.$$

Jensenin epäyhtälö

Olkoon f aidosti konveksi funktio jollakin välillä I ja olkoot α_1, α_2, $\ldots$, α_n sellaisia positiivisia reaalilukuja, että niiden summa on yksi. Tällöin kaikilla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ pätee

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)\,,$$

ja tässä pätee yhtäsuuruus jos ja vain jos $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Siinä tapauksessa, missä f on välillä I ylöspäin kupera, annettu epäyhtälö pätee päinvastaiseen suuntaan.

Funktion f konveksisuudelle (vastaavasti ylöspäin kuperuudelle) on olemassa kaksi käytännöllistä derivaattatestia:

1. Olkoon f derivoituva funktio välillä I. Tällöin f on aidosti konveksi (ylöspäin kupera) välillä I jos ja vain jos sen derivaatta f' on aidosti kasvava (vähenevä) välillä I.

2. Olkoon f kahdesti derivoituva funktio välillä I. Tällöin funktio f on aidosti konveksi (ylöspäin kupera) välillä I jos ja vain jos f'' on aidosti positiivinen (negatiivinen) välin I sisällä.

Esimerkki. (Sama kuin intialainen esimerkki sivulla 5) Olkoon n lukua yksi suurempi kokonaisluku ja olkoot a_1, a_2, $\ldots$, ja a_n sellaisia positiivisia reaalilukuja joiden summa on yksi. Osoita, että

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Ratkaisu. Luvut $a_1, a_2, \ldots,$ ja a_n kuuluvat välille $I =]0,1[$ ja rajoitumme siksi tarkastelemaan lausekkeen $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$ määräämää kahdesti derivoituvaa funktiota f välillä I. Suoralla laskulla näemme, että

$$f''(x) = \frac{4-x}{4\,(1-x)^{\frac{5}{2}}},$$

kun $x \in I$. On selvää, että f'' saa vain positiivisia arvoja välillä I ja siksi f on aidosti konveksi tuolla välillä.

Voimme siis käyttää Jensenin epäyhtälöä:

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} &= n \cdot \frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)}{n} \\ &\geqslant n \cdot f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned}$$

Esimerkki. (Korea, 1998) Olkoot a, b ja c sellaisia reaalilukuja, että niille pätee $a + b + c = abc$. Osoita, että

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Ratkaisu. Tehtävän oletukset suosittelevat sijoitusta

$$\alpha = \arctan a, \quad \beta = \arctan b, \quad \text{ja} \quad \gamma = \arctan c.$$

Tämän sijoituksen ja ehdon $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ vuoksi $\alpha, \beta, \gamma \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ja $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Tehtävä on nyt osoittaa, että

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}.$$

Funktion $f(x) = \cos x$ toinen derivaatta $f''(x) = -\cos x$ saa selvästi vain negatiivisia arvoja välillä $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ja siksi f on aidosti konveksi välillä$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Voimme siis jälleen käyttää Jensenin epäyhtälöä:

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)}{3} \leqslant f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Esimerkki. (Yhdysvallat, 1974) Osoita positiivisille reaaliluvuille a, b ja c, että

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Ratkaisu. Tarkastellaan funktiota $f(x) = \log x^x = x\log x$ positiivisille reaaliluvuille x. Koska sen toinen derivaatta $f''(x) = \frac{1}{x}$ saa selvästi vain positiivisia arvoja, on funktio f konveksi.

Jensenin epäyhtälön nojalla siis

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\log\left(a^a b^b c^c\right) = \frac{\log a^a + \log b^b + \log c^c}{3} &= \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \\ &\geqslant f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \log\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{a+b+c}{3}}.\end{aligned}$$

Toisaalta aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{a+b+c}{3}} \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{9}},$$

ja koska logaritmi on kasvava funktio,

$$\log\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{a+b+c}{3}} \geqslant \log(abc)^{\frac{a+b+c}{9}} = \frac{1}{3}\log(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Potenssikeskiarvojen epäyhtälö

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ei-negatiivisia reaalilukuja, k ja m positiivisia reaalilukuja ja $k \leqslant m$. Tällöin

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}} \leqslant \sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n}},$$

ja tässä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan siinä tapauksessa että pätee $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Esimerkki. (Pohjois-Afrikan matematiikkaolympiadi, 1986) Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \geqslant 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2.$$

Ratkaisu. Aritmeettis-geometrisen antamasta epäyhtälöstä $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ seuraa, että

$$\frac{4}{(a+b)^2} \leqslant \frac{1}{ab}.$$

Tästä ja vastaavista epäyhtälöistä muille lukupareilla seuraa, että

$$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \geqslant 12\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right).$$

Lopuksi potenssikeskiarvojen epäyhtälöstä (tai tarkemmin muotoilumme tapauksesta $n=3$, $m=2$, $k=1$) seuraa, että

$$\begin{aligned}12\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) &= 36\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\\ &\geqslant 36\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\right)^2 = 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2.\end{aligned}$$

Esimerkki. (Tšekki ja Slovakia, 2000) Osoita, että

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqslant \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a ja b, ja selvitä milloin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus.

Ratkaisu. Potenssikeskiarvojen epäyhtälön nojalla

$$\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)\right)^3 \leqslant \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2,$$

ja tässä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$, eli jos ja vain jos $a=b$. Haluttu epäyhtälö seuraa nyt suoraan identiteetistä

$$\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2 = \frac{a+b}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Esimerkki. Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$x^5+y^5+z^5 \leqslant \frac{x^6}{\sqrt{yz}}+\frac{y^6}{\sqrt{zx}}+\frac{z^6}{\sqrt{xy}}.$$

Ratkaisu. Asettamalla $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$ ja $c=\sqrt{z}$ sekä laventamalla nimittäjät pois saamme halutun epäyhtälön kanssa yhtäpitävän epäyhtälön

$$\left(a^{10}+b^{10}+c^{10}\right)abc \leqslant a^{13}+b^{13}+c^{13}.$$

Mutta nyt potenssikeskiarvojen epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
a^{13}+b^{13}+c^{13} &= 3\left(\sqrt[13]{\frac{a^{13}+b^{13}+c^{13}}{3}}\right)^{13}\\
&= 3\left(\sqrt[13]{\frac{a^{13}+b^{13}+c^{13}}{3}}\right)^{10}\left(\sqrt[13]{\frac{a^{13}+b^{13}+c^{13}}{3}}\right)^{3}\\
&\geqslant 3\left(\sqrt[10]{\frac{a^{10}+b^{10}+c10}{3}}\right)^{10}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{3}\\
&\geqslant \left(a^{10}+b^{10}+c^{10}\right)\left(\sqrt[3]{abc}\right)^3 = \left(a^{10}+b^{10}+c^{10}\right)abc.
\end{aligned}$$

Schurin epäyhtälö

Olkoot x, y ja z ei-negatiivisia reaalilukuja. Tällöin kaikille $r \in \mathbb{R}_+$ pätee

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

Lisäksi tässä pätee yhtäsuuruus jos ja vain jos $x=y=z$.

Tapauksessa $r=1$ tämä epäyhtälö kirjoitetaan usein ekvivalentissa muodossa

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2.$$

Seuraavassa esimerkissä käytämme **homogenisointia**, joka on erittäin hyödyllinen tarkasteltaessa polynomien epäyhtälöitä silloin kun muuttujia sitoo jokin ylimääräinen ehto kuten vaikkapa $x+y+z=1$ tai $xyz=1$. Silloin voi kertoa kaikki epäyhtälön termit sopivilla lausekkeilla siten, että kaikki termit muuttuvat samanasteisiksi.

Esimerkiksi, kun $xyz = 1$, epäyhtälö $x^2y + xz \leqslant 2z + 7$ on yhtäpitävä homogeenisen epäyhtälön $x^2y + xz\sqrt[3]{xyz} \leqslant 2z\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + 7xyz$ kanssa. Tässä jälkimmäisessä epäyhtälössä kunkin termin aste on kolme. Tekemällä sijoitukset $x = u^3$, $y = v^3$ ja $z = w^3$ ja pudottamalla yhteiset tekijät pois päädymme epäyhtälöön $u^4v^2 + u^2w^2 \leqslant 2vw^5 + 7uv^2w^3$, joka voi hyvinkin olla helpompi käsitellä.

Esimerkki. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset, 1984) Olkoot x, y ja z ei-negatiivisia reaalilukuja joiden summa on yksi. Osoita, että

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

Ratkaisu. Käyttämällä ehtoa $x + y + z = 1$, voimme palauttaa todistettavan epäyhtälön homogeeniseen muotoon

$$0 \leqslant (xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}(x + y + z)^3.$$

Ensimmäinen näistä sievenee muotoon

$$0 \leqslant xyz + x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2,$$

joka selvästi pitää paikkaansa.

Jälkimmäinen epäyhtälö sievenee muotoon

$$7\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 15xyz \geqslant 6\left(x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2\right).$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$, ja tätä tietoa ja Schurin epäyhtälöä käyttämällä näemme, että

$$\begin{aligned} 7\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 15xyz &\geqslant 6\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + 18xyz \\ &\geqslant 6\left(x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2\right). \end{aligned}$$

Esimerkki. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset, 2000) Olkoot a, b ja c sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $abc = 1$. Osoita, että

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

Ratkaisu. Todistettavalla epäyhtälöllä on sidosehdon $abc = 1$ puitteissa ekvivalentti muoto

$$\left(a - \sqrt[3]{abc} + \frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{b}\right)\left(b - \sqrt[3]{abc} + \frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{c}\right)\left(c - \sqrt[3]{abc} + \frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{a}\right) \leqslant abc.$$

Tekemällä sijoitukset $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ tämä taas palautuu muotoon

$$\left(x^2y - y^2z + z^2x\right)\left(y^2z - z^2x + x^2y\right)\left(z^2x - x^2y + y^2z\right) \leqslant x^3y^3z^3.$$

Lopuksi, tekemällä sijoitukset $x^2y = u$, $y^2z = v$, $z^2x = w$, päädymme epäyhtälöön

$$3uvw + \left(u^3 + v^3 + w^3\right) \geqslant u^2v + v^2w + w^2u + uv^2 + vw^2 + wu^2,$$

joka on vain Schurin epäyhtälö tapauksessa $r = 1$.

MacLaurinin epäyhtälö

Olkoot a_1, a_2, …, a_n positiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$\frac{1}{\binom{n}{1}}\sum_i a_i \geqslant \sqrt{\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{i<j} a_i a_j} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{\binom{n}{3}}\sum_{i<j<k} a_i a_j a_k} \geqslant \ldots \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{\binom{n}{n}} a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Tässä vallitsevat yhtäsuuruudet vain ja ainoastaan siinä tapauksessa, että pätee $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Tämä on hyvin elegantti aritmeettis-geometrisen epäyhtälön yleistys. Nimittäin ensimmäinen lausekkeista on vain lukujen a_1, a_2, …, a_n aritmeettinen keskiarvo, ja viimeinen juurilauseke on vain niiden geometrinen keskiarvo.

Esimerkki. (Puola, 1989) Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

Ratkaisu. Tämä on vain MacLaurinin epäyhtälön erikoistapaus: toisen ja kolmannen lausekkeen välinen epäyhtälö kun $n = 4$.

Esimerkki. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Ratkaisu. Potenssikeskiarvojen epäyhtälön nojalla

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^8.$$

Toisaalta, MacLaurinin epäyhtälön nojalla

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^8 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geqslant (abc)^2 \cdot \frac{ab+bc+ca}{3}.$$

Siispä

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{3}{(abc)^3}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^8 \geqslant \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Muirheadin epäyhtälö

Yksinkertaistaaksemme merkintöjä otamme käyttöön symbolin $\sum_{\mathrm{sym}}$ symmetrisille summille. Olkoon $P(x,y,z)$ kolmen muuttujan x, y ja z lauseke. Määrittelemme

$$\sum_{\mathrm{sym}} P(x,y,z) = P(x,y,z)+P(x,z,y)+P(y,x,z) + P(y,z,x)+P(z,x,y)+P(z,y,x)\,.$$

Esimerkiksi, jos $P_1(x,y,z) = x^3$, $P_2(x,y,z) = x^2y^2z^2$, ja $P_3(x,y,z) = x^3y^2$, niin

$$\sum_{\text{sym}} P_1(x,y,z) = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3,$$

ja

$$\sum_{\text{sym}} P_2(x,y,z) = 6x^2y^2z^2,$$

sekä

$$\sum_{\text{sym}} P_3(x,y,z) = x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 + x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3.$$

Tämä merkintätapa yleistyy tietenkin helposti myös mielivaltaisen monen muuttujan tapaukseen, mutta käyttötarkoituksiimme riittää kolmen muuttujan tapaus.

Muirheadin epäyhtälö. (Kolmelle muuttujalle) Olkoot a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 ja b_3 sellaisia ei-negatiivisia reaalilukuja, että $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3$, $a_1 \geqslant b_1$, $a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2$, ja $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Tällöin kaikille ei-negatiivisille reaaliluvuille x, y ja z pätee epäyhtälö

$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} \geqslant \sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$

Tämä nimenomainen epäyhtälö osoittautuu erittäin hyödylliseksi silloin kun monet muut ratkaisumenetelmät epäonnistuvat. Sen käyttäminen kuitenkin edellyttää, että tarkastelun kohteena on homogeeninen epäyhtälö.

Esimerkki. (Yhdysvallat, 1997) Osoita kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b ja c epäyhtälö

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

Ratkaisu. Kertomalla puolittain nimittäjien tulolla todistettava epäyhtälö saa varsin epämiellyttävän muodon

$$\begin{aligned}\Big(\big(a^3+b^3+abc\big)\big(b^3+c^3+abc\big) + \big(b^3+c^3+abc\big)\big(c^3+a^3+abc\big)\\ + \big(c^3+a^3+abc\big)\big(a^3+b^3+abc\big)\Big)\,abc\\ \leqslant \big(a^3+b^3+abc\big)\big(b^3+c^3+abc\big)\big(c^3+a^3+abc\big).\end{aligned}$$

Kun kerromme tämän puolittain vakiolla kaksi, voimme kirjoittaa epäyhtälön uudelleen muodossa

$$\begin{aligned}&\sum_{\text{sym}} \big(a^3+b^3+abc\big)\big(a^3+c^3+abc\big)\,abc\\ &\qquad\leqslant 2\big(a^3+b^3+abc\big)\big(b^3+c^3+abc\big)\big(c^3+a^3+abc\big).\end{aligned}$$

Kertomalla tässä kaikki auki saadaan

$$\sum_{\text{sym}} \left(a^7bc + 3a^4b^4c + 4a^5b^2c^2 + a^3b^3c^3\right)$$
$$\leqslant \sum_{\text{sym}} \left(a^7bc + 2a^6b^3 + 2a^5b^2c^2 + 3a^4b^4c + a^3b^3c^3\right).$$

Lopuksi, tämä sievenee muotoon

$$\sum_{\text{sym}} a^6b^3 \geqslant \sum_{\text{sym}} a^5b^2c^2,$$

joka seuraa suoraan Muirheadin epäyhtälöstä (eksponenteilla $a_1 = 6$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $b_1 = 5$, ja $b_2 = b_3 = 2$).

Esimerkki. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset, 1995) Olkoot x, y ja z sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $xyz = 1$. Osoita epäyhtälö

$$\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Ratkaisu. Olettaen, että emme keksi "terävää" tapaa ratkaista tätä ongelmaa, voimme kuitenkin lähestyä sitä suoraan.

Aloitamme homogenisoimalla todistettavan epäyhtälön jakamalla sen vakiotermin lausekkeella $\sqrt[3]{(xyz)^4}$. Merkintöjä siistiäksemme teemme muuttujanvaihdot $x = a^3$, $y = b^3$ sekä $z = c^3$, missä tietenkin $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Todistettava epäyhtälö on nyt muuttunut muotoon

$$\frac{1}{a^9(b^3+c^3)} + \frac{1}{b^9(c^3+a^3)} + \frac{1}{c^9(a^3+b^3)} \geqslant \frac{3}{2a^4b^4c^4}.$$

Laventamalla kaikki auki ja kertomalla puolittain nimittäjillä epäyhtälö saa muodon

$$\sum_{\text{sym}} \left(a^{12}b^{12} + 2a^{12}b^9c^3 + a^9b^9c^6\right) \geqslant \sum_{\text{sym}} \left(3a^{11}b^8c^5 + a^8b^8c^8\right).$$

Tämän taas voi muuttaa muotoon

$$\sum_{\text{sym}} \left(a^{12}b^{12} - a^{11}b^8c^5\right) + 2\sum_{\text{sym}} \left(a^{12}b^9c^3 - a^{11}b^8c^5\right) + \sum_{\text{sym}} \left(a^9b^9c^6 - a^8b^8c^8\right) \geqslant 0,$$

mikä taas nähdään paikkaansa pitäväksi käyttämällä Muirheadin epäyhtälöä suoraviivaisella tavalla kolmeen kertaan.

Tämän ongelman voi tietenkin ratkaista myös monilla muilla tavoilla. Eräs niistä on käyttää Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä. Sijoittamalla $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ ja $z = \frac{1}{c}$ todistettava epäyhtälö saa muodon

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Nyt, koska

$$x+y+z=\frac{x}{\sqrt{y+z}}\cdot\sqrt{y+z}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}\cdot\sqrt{z+x}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\cdot\sqrt{x+y},$$

on Cauchyn–Schwarziz epäyhtälön nojalla

$$(x+y+z)^2\leqslant\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)\big((y+z)+(z+x)+(x+y)\big).$$

Siispä

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{x+y+z}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Viimeisin näistä epäyhtälöistä seuraa aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä.

Eräs toinen vaihtoehtoinen tapa lähestyä samaa ongelmaa olisi käyttää suuruusjärjestysepäyhtälöä. Koska todistettava epäyhtälö on symmetrinen, voimme huoletta olettaa, että $x\geqslant y\geqslant z$. Tällöin myös $x^2\geqslant y^2\geqslant z^2$ ja $\frac{1}{y+z}\geqslant\frac{1}{z+x}\geqslant\frac{1}{x+y}$. Nyt, koska

$$\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ \frac{1}{y+z} & \frac{1}{z+x} & \frac{1}{x+y}\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ \frac{1}{x+y} & \frac{1}{y+z} & \frac{1}{z+x}\end{bmatrix}\quad\text{ja}$$

$$\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ \frac{1}{y+z} & \frac{1}{z+x} & \frac{1}{x+y}\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ \frac{1}{z+x} & \frac{1}{x+y} & \frac{1}{y+z}\end{bmatrix},$$

saadaan laskemalla nämä epäyhtälöt yhteen ja jakamalla puolittain luvulla kaksi, että

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\right).$$

Koska $s^2+t^2\geqslant\frac{(s+y)^2}{2}$ kaikilla $s,t\in\mathbb{R}_+$, on edellisen epäyhtälön oikea puoli

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{x+z}{2}\right)=\frac{x+y+z}{2}.$$

Lopuksi, käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä näemme, että

$$\frac{x+y+z}{2}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}.$$

Sijoitukset

Epäyhtälöiden käsittelyä saattaa joskus huomattavasti helpottaa sopivien sijoitusten tekeminen, kuten jo sivun 12 korealaisessa esimerkissä on nähty.

Esimerkki. (Venäjä, 2000) Olkoot x ja y sellaisia reaalilukuja, että $x,y\in[0,1]$. Osoita, että

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Ratkaisu. Jos $x = 0$, ongelma palautuu epäyhtälöön

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leqslant 2,$$

mikä selvästi pitää paikkaansa. Oletetaan siis, että $x, y \in \left]0, 1\right]$. Todistettava epäyhtälö näyttää melkein sopivalta Jensenin epäyhtälön sovellutuskohteeksi; onhan funktio $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ylöspäin kupera välillä $\left]0, 1\right]$. Ainoa este vain on, että epäyhtälön oikealla puolella esiintyy tulo xy summan $x + y$ sijasta.

Tämän vuoksi näyttäisi sopivammalta tarkastastella funktion f sijaan funktiota $g(s) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2s}}}$. Tätä varten teemme muuttujanvaihdot $x = e^{-u}$ ja $y = e^{-v}$, missä u ja v ovat ei-negatiivisia reaalilukuja. Ongelma on nyt palautunut yhtäpitävään epäyhtälöön

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2u}}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2v}}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+e^{-(u+v)}}}.$$

Ongelman ratkaisu edellyttää enään sitä, että funktion g osoitetaan olevan ylöspäin kupera kun $s \geqslant 0$. Yksinkertaiset laskut antavat toisen derivaatan lausekkeen

$$g''(s) = \frac{1 - 2e^{2s}}{(1+e^{-2s})^{\frac{5}{2}}\, e^{4s}}.$$

Tässä nimittäjä on varmasti positiivinen, kun taas osoittaja on negatiivinen koska $e^{2s} \geqslant 1$ kun $s \geqslant 0$. Täten $g(s)$ on ylöspäin kupera kun $s \geqslant 0$ ja ratkaisu on valmis.

Esimerkki. Osoita, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b, c ja d pätee

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

Ratkaisu. Jakamalla epäyhtälö puolittain sen oikean puolen lausekkeella saadaan yhtäpitävä epäyhtälö

$$\sqrt{\frac{a}{a+d} \cdot \frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+c} \cdot \frac{d}{a+d}} \leqslant 1,$$

eli

$$\sqrt{\frac{a}{a+d} \cdot \frac{b}{b+c}} + \sqrt{\left(1 - \frac{b}{b+c}\right)\left(1 - \frac{a}{a+d}\right)} \leqslant 1.$$

Sijoittamalla tähän $\frac{a}{a+d} = \sin^2 \alpha$ ja $\frac{b}{b+c} = \sin^2 \beta$ joillakin sopivilla $\alpha, \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, epäyhtälön vasen puoli voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha - \beta),$$

ja tässä viimeinen kosinilauseke on varmasti pienempää tai yhtäsuurta kuin yksi.

Harjoitustehtäviä

Jokaisen tehtävän kohdalla on kirjoittajan ehdotus lähestymistavaksi. Ratkaisujen lähestymistavat eivät tietenkään koskaan ole yksikäsitteisiä ja jokaisen näistä tehtävistä voi ratkaista myös muilla tavoilla.

1. (Pietari, 1997) Olkoot x, y ja z lukua kaksi suurempia reaalilukuja. Osoita, että

$$\left(x+y^3\right)\left(y+z^3\right)\left(z+x^3\right) \geqslant 125xyz.$$

[Vihje: $x + y^3 \geqslant x + 4y$. Nyt, käytä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä.]

2. (Venäjä, 1995) Osoita, että kaikille positiivisille reaaliluvuille x ja y pätee

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

[Vihje: Yhteinen nimittäjä sekä aritmeettis-geometrinen epäyhtälö.]

3. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}.$$

[Vihje: aritmeettis-geometrinen epäyhtälö.]

4. (Aasian ja Tyynen valtameren alueen matematiikkaolympiadi, 1998) Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

[Vihje: kaksi aritmeettis-geometrisen epäyhtälön sovellutusta.]

5. (Puola, 1990) Olkoot x, y ja z sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $xyz = 2$. Osoita, että

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geqslant 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right).$$

[Vihje: Voit aloittaa osoittamalla, että $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$ ja sitten jatkaa aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä.]

6. (Vietnam, 1998) Olkoon $n \geqslant 2$ kokonaisluku ja olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivisia reaalilukuja joille

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \frac{1}{x_2 + 1998} + \ldots + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998}.$$

Todista, että

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}{n-1} \geqslant 1998.$$

[Vihje: Huomaa, että luvuille $y_\ell = \frac{1998}{x_\ell + 1998}$ pätee $1 - y_\ell = \sum_{k \neq \ell} y_k$. Nyt, käytä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä.]

7. (Valko-Venäjä, 1999) Olkoot a, b ja c sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Osoita, että

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}.$$

[Vihje: Käytä aritmeettis-harmonista epäyhtälöä, sekä helppoa epäyhtälöä $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.]

8. (Pietari, 1999) Olkoot $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ reaalilukuja. Osoita, että

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n.$$

[Vihje: aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$.]

9. Etsi kaikki ne positiivisten reaalilukujen parit $\langle x, y \rangle$, joille

$$\frac{64x^2y^2}{4x^2 + y^2} = (x+1)(y+2)(2x+y).$$

[Vihje: Nimittäjillä laventamisen jälkeen käytä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä oikean puolen lausekkeeseen.]

10. (Puola, 1990) Olkoot a ja b kaksi positiivista reaalilukua. Etsi kaikki sellaiset positiivisten reaalilukujen parit $\langle x, y \rangle$, joille

$$\frac{27xy}{(1+2ax)(1+2by)} = \frac{1}{ab} + \frac{x}{a} + \frac{y}{b}.$$

[Vihje: Tässä voi käyttää aritmeettis-geometrista epäyhtälöä kolmeen kertaan: lausekkeeseen $1 + 2ax$, lausekkeeseen $1 + 2by$, sekä yhtälön oikean puolen lausekkeeseen.]

11. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}}{a^n + b^n + c^n} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

[Vihje: Tšebyšovin epäyhtälö.]

12. Ratkaise sivun 12 yhdysvaltalainen ongelma Tšebyšovin epäyhtälöllä.
[Vihje: Kirjoita lauseke $\log\left(a^a b^b c^c\right)$ muodossa $a \log a + b \log b + c \log c$.]

13. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset, 1978) Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erisuuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2} \geqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

[Vihje: suuruusjärjestysepäyhtälö.]

14. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

[Vihje: Suuruusjärjestysepäyhtälö.]

15. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita suuruusjärjestysepäyhtälöä käyttämällä, että

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

(Vertaa tätä sivun 16 esimerkkiin.)

16. (Korea, 2000) Olkoot a, b, c, x, y ja z sellaisia reaalilukuja, että $a \geqslant b \geqslant c > 0$ ja $x \geqslant y \geqslant z > 0$. Osoita, että

$$\frac{a^2 x^2}{(by + cz)(bz + cy)} + \frac{b^2 y^2}{(cz + ax)(cx + az)} + \frac{c^2 z^2}{(ax + by)(ay + bx)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

[Vihje: Osoita ensin käyttämällä merkintöjä $\alpha = a^2 x^2$, $\beta = b^2 y^2$ ja $\gamma = c^2 z^2$ sekä suuruusjärjestysepäyhtälöä, että vasen lauseke on $\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right)$, ja käytä sitten Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä.]

17. (Irlanti, 1999) Olkoot a, b, c ja d sellaisia positiivisia reaalilukuja, että niiden summa on yksi. Todista, että

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geqslant \frac{1}{2},$$

ja että tässä pätee yhtäsuuruus jos ja vain jos $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

[Vihje: Kerro epäyhtälön vasen puoli nimittäjien summalla ja käytä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä.]

18. (Tšekki ja Slovakia, 1999) Osoita, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee epäyhtälö

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geqslant 1.$$

[Vihje: Kerro vasen puoli summalla $a(b+2c) + b(c+2a) + c(a+2b)$ ja käytä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä, tai tee sijoitukset $x = b + 2c$, $y = c + 2a$ ja $z = a + 2b$ ja käytä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä.]

19. Olkoot a, b, c ja d sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $c^2+d^2 = \big(a^2+b^2\big)^3$. Osoita, että

$$\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d} \geqslant 1.$$

[Vihje: Osoita käyttämällä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä, että

$$\left(\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d}\right)(ac+bd) \geqslant \big(a^2+b^2\big)^2 \geqslant ac+bd.]$$

20. Todista, että kaikille ei-negatiivisille reaaliluvuille x_1, x_2, $\ldots$, x_n pätee epäyhtälö

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant \left(1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right)^n.$$

[Vihje: Sijoita $a_\ell = \sqrt[n]{x_\ell}$ ja käytä Hölderin epäyhtälöä.]

21. Osoita Hölderin epäyhtälöllä, että kaikille positiivisille reaaliluvuille a, b ja c pätee

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a.$$

22. Olkoon annettu positiiviset reaaliluvut a, b, c, p, q ja r, joille $p+q+r=1$. Osoita, että

$$a+b+c \geqslant a^pb^qc^r + a^qb^rc^p + a^rb^pc^q.$$

[Vihje: Hölderin epäyhtälö.]

23. Olkoon $x_\ell \in [1,2]$ jokaisella $\ell \in \big\{1,2,\ldots,n\big\}$. Osoita, että

$$2\left(\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\right)\cdot\left(\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{x_\ell}\right)^2 \geqslant n^3.$$

[Vihje: Hölderin epäyhtälö parametrien arvoilla $p=\frac{1}{3}$ ja $q=\frac{2}{3}$.]

24. Olkoot a, b, c, x, y ja z positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt{\frac{ax^2+by^2+cz^2}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{ay^2+bz^2+cx^2}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{az^2+bx^2+cy^2}{a+b+c}} \geqslant x+y+z.$$

[Vihje: Minkowskin epäyhtälö.]

25. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}.$$

(Huomaa tarkennus verrattuna tehtävään kolme sivulla 21.)
[Vihje: Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö.]

26. (Irlanti, 1998) Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista Jensenin epäyhtälöllä, että

$$\frac{9}{a+b+c} \leqslant 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

27. Olkoot x, y ja z sellaisia positiivisia reaalilukuja että $x+y+z=1$. Todista epäyhtälö

$$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}\leqslant\frac{3}{4}.$$

[Vihje: Jensenin epäyhtälö tai aritmeettis-geometrinen epäyhtälö.]

28. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \,]0,2[$ sellaisia, että $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$. Etsi lausekkeen

$$\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{4a_\ell-a_\ell^3}$$

pienin mahdollinen arvo.

[Vihje: Jensenin epäyhtälö, tai aritmeettis-geometrinen epäyhtälö yhdessä Hölderin epäyhtälön kanssa.]

29. (Pohjoismaat, 1992) Osoita, että kaikkien 1-säteisen ympyrän sisäänpiirrettyjen kolmioiden joukosta tasasivuisella kolmiolla on suurin piiri.

[Vihje: Olkoot kolmion kulmat α, β ja γ. Tällöin piirin puolikas voidaan kirjoittaa muodossa $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$.]

30. Olkoot $x, y, z \in \,]0,4[$ sellaisia, että $xyz=1$. Todista epäyhtälö

$$\sqrt{\frac{x}{x+8}}+\sqrt{\frac{y}{y+8}}+\sqrt{\frac{z}{z+8}}\geqslant 1.$$

[Vihje: Tämä epäyhtälö näyttää siltä, että sen todistamisessa voisi käyttää Jensenin epäyhtälöä. Kuitenkin tässä tehtävässä esiintyy ehto $xyz=1$, kun taas muotoa $x+y+z=$ vakio oleva ehto olisi mukavampi. Tämän esteen voi kiertää ottamalla käyttöön uudet muuttujat a, b ja c sijoituksilla $x=e^a$, $y=e^b$ ja $z=e^c$. Tämän jälkeen kannattaa tarkastella funktiota $f(s)=\sqrt{\frac{e^s}{e^s+8}}$. Tämä on itse asiassa osa erästä tehtävää vuoden 2001 kansainvälisistä matematiikkaolympialaisista. Koko tehtävää varten pitää poistaa ehdot $x<4$, $y<4$ ja $z<4$. Jos täsmälleen yksi muuttujista on vähintään neljä, niin voit edelleen käyttää Jensenin epäyhtälöä (niihin termeihin joissa muuttujan arvo on pienempi kuin neljä). Jos vähintään kaksi muuttujista on vähintään yhtä suuria kuin neljä, niin todistus on suoraviivainen.]

31. (Venäjä, 1999) Olkoot x ja y positiivisia reaalilukuja, joille $x^3+y^3>2$. Osoita, että

$$x^2+y^3<x^3+y^4.$$

[Vihje: Voit aloittaa potenssikeskiarvojen epäyhtälöllä sovellettuna lausekkeisiin $\frac{x^2+y^2}{2}$ ja $\frac{x^3+y^3}{2}$.

32. (Iran, 1998) Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja, joille $abcd=1$. Osoita, että

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geqslant\max\left\{a+b+c+d,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right\}.$$

[Vihje: Edellisessä epäyhtälössä voit käyttää potenssikeskiarvojen epäyhtälöä. Jälkimmäinen seuraa aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä.]

33. Olkoot a, b, c ja d mielivaltaisia positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{a^3+b^3+d^3}{a+b+d}+\frac{a^3+c^3+d^3}{a+c+d}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}\geqslant a^2+b^2+c^2+d^2.$$

[Vihje: Osoita potenssikeskiarvojen epäyhtälöllä, että

$$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)\big(a^2+b^2+c^2\big).]$$

34. (Puola, 1999) Olkoot x, y ja z positiivisia reaalilukuja, joille $x+y+z=1$. Osoita, että

$$x^2+y^2+z^2+2\sqrt{3xyz}\leqslant 1.$$

[Vihje: Tee epäyhtälöstä homogeeninen.]

35. (Iso-Britannia, 1999) Jotkin kolme ei-negatiivista reaalilukua p, q ja r toteuttavat ehdon $p+q+r=1$. Osoita, että

$$7\,(pq+qr+rp)\leqslant 2+9pqr.$$

[Vihje: Tee epäyhtälöstä homogeeninen käyttämällä ehtoa $p+q+r=1$ ja käytä sitten Schurin epäyhtälöä.]

36. Olkoot a_1, a_2, …, a_n positiivisia reaalilukuja siten, että

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=2^n.$$

Osoita, että $a_1a_2\cdots a_n\leqslant 1$.

[Vihje: Kirjoita tulo $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ MacLaurinin epäyhtälön juurrettavista muodostettuna summana ja arvioi sitä sitten alas päin. Binomikaava saattaa olla hyödyksi.]

37. (Aasian ja Tyynen valtameren alueen matematiikkaolympiadi, 1998) Olkoot a, b ja c kolme positiivista reaalilukua. Osoita, että

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

[Vihje: Sijoita $a=x^3$, $b=y^3$ ja $c=z^3$, ja käytä sitten Muirheadin epäyhtälöä.]

38. Osoita, että kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x, y ja z pätee

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}\leqslant\frac{9}{4\,(x+y+z)}.$$

[Vihje: Käytä Muirheadin epäyhtälöä.]

39. Olkoot $x,y\in[-1,1]$. Etsi lausekkeen

$$xy+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

suurin mahdollinen arvo.

[Vihje: Annettu lauseke suorastaan vaatii käyttämään trigonometrisiä sijoituksia $x=\cos\alpha$ ja $y=\cos\beta$, missä $\alpha,\beta\in[0,\pi]$.]

40. Olkoot x, y ja z sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $xy + yz + zx = 1$. Osoita, että

$$\frac{x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{y\left(1-y^2\right)}{\left(1+y^2\right)^2} + \frac{z\left(1-z^2\right)}{\left(1+z^2\right)^2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}.$$

[Vihje: Koska tässä esiintyvät lausekkeet muistuttavat identiteettien

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \quad \text{ja} \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

lausekkeita, kannattaa yrittää sijoituksia $x = \tan\frac{\alpha}{2}$, $y = \tan\frac{\beta}{2}$ ja $z = \tan\frac{\gamma}{2}$, missä $\alpha, \beta, \gamma \in \,]0, \pi[$.]

Epäyhtälöiden todistukset

Aritmeettis-geometris-harmoninen epäyhtälö

Koska aritmeettis-geometrinen epäyhtälö on niin tärkeä ja hyödyllinen, annamme sille tässä kolme eri todistusta. Tämän tekstin viimeisestä luvusta löytyy neljäs todistus.

Ensimmäinen todistus (induktiolla). Aloitamme todistamalla epäyhtälön tapauksessa $n = 2$.

Varmasti $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geqslant 0$. Kertomalla auki tämän epäyhtälön vasemman puolen, siirtämällä negatiivisen termin oikealle puolelle ja jakamalla puolittain kahdella saamme epäyhtälön $\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}$. Täten aritmeettis-geometrinen epäyhtälö pätee tapauksessa $n = 2$.

Olettakaamme nyt, että epäyhtälö pitää paikkaansa jollakin $n \geqslant 2$. Osoitamme, että tällöin se pitää paikkaansa myös $2n$ muuttujan tapauksessa. Tämä seuraa käyttämällä kerran induktio-oletusta ja kerran kahden muuttujan aritmeettis-geometrista epäyhtälöä: jos $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{2n} a_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{2n} a_\ell &\geqslant n\left(\sqrt[n]{\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell} + \sqrt[n]{\prod_{\ell=n+1}^{2n} a_\ell}\right)\\ &\geqslant 2n \cdot \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell}\sqrt[n]{\prod_{\ell=n+1}^{2n} a_\ell}} = 2n\sqrt[2n]{\prod_{\ell=1}^{2n} a_\ell}.\end{aligned}$$

Induktiolla seuraa siis, että aritmeettis-geometrinen epäyhtälö pätee kun $n = 2^k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}_+$.

Lopuksi oletamme, että epäyhtälö pätee jollakin $n \geqslant 2$ ja osoitamme, että se pätee tällöin myös $n - 1$ muuttujalle.

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ positiivisia reaalilukuja. Merkitään

$$a_n = g = \sqrt[n-1]{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell}.$$

Koska induktio-oletuksen nojalla

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} a_\ell + g \geqslant n\sqrt[n]{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell \cdot g} = n\sqrt[n]{g^{n-1} \cdot g} = ng,$$

on

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} a_\ell + \sqrt[n-1]{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell} \geqslant n \cdot \sqrt[n-1]{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell},$$

eli

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} a_\ell \geqslant (n-1) \sqrt[n-1]{\prod_{\ell=1}^{n-1} a_\ell}.$$

Täten aritmeettis-geometrinen epäyhtälö pätee kaikilla $n \geqslant 2$.

Toinen todistus (helpolla analyysillä). Todistamme aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mielivaltaisilla painokertoimilla.

Lause. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja, ja olkoot $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Merkitään

$$G = \prod_{\ell=1}^{n} a_k^{\alpha_\ell}, \quad \text{ja} \quad A = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell a_\ell.$$

Tällöin $G \leqslant A$, ja yhtäsuuruus vallitsee täsmälleen silloin kun $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Todistus. Asettakaamme $a_\ell = (1 + x_\ell) A$. Huomaamme, että $x_\ell > -1$ ja $\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell x_\ell = 0$. Siten

$$G = \prod_{\ell=1}^{n} a_\ell^{\alpha_\ell} = \prod_{\ell=1}^{n} \big((1+x_\ell) A\big)^{\alpha_\ell} = A \prod_{\ell=1}^{n} (1+x_\ell)^{\alpha_\ell} \leqslant A \prod_{\ell=1}^{n} e^{x_\ell \alpha_\ell} = A.$$

Tästä viimeisestä epäyhtälöstä vakuuttuu tarkastelemalla funktiota $f(x) = e^x - (1+x)$. Nimittäin $f(0) = 0$ ja koska $f'(x) = e^x - 1$, on $f'(x) = 0$ ainoastaan silloin kun $x = 0$. Lopuksi, koska $f''(0) = 1$, on lausekkeella $f(x)$ aito minimi kohdassa $x = 0$. Siispä $f(x) \geqslant 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Yhtäsuuruus vallitsee silloin ja vain silloin kun $x_\ell = 0$ jokaisella $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, eli täsmälleen silloin kun $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Nyt, asettamalla tämän lauseen tuloksessa $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, saamme suoraan tavanomaisen aritmeettis-geometrisen epäyhtälön.

Kolmas todistus. Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö seuraa myös helposti Jensenin epäyhtälöstä.

Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jälleen positiivisia reaalilukuja. Koska eksponenttifunktio $f(x) = e^x$ on aidosti konveksi, ja koska $n \cdot \frac{1}{n} = 1$, seuraa Jensenin epäyhtälöstä (valitsemalla $x_\ell = \log a_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$), että

$$e^{\frac{1}{n}\log a_1 + \frac{1}{n}\log a_2 + \ldots + \frac{1}{n}\log a_n} \leqslant \frac{1}{n} e^{\log a_1} + \frac{1}{n} e^{\log a_2} + \ldots + \frac{1}{n} e^{\log a_n},$$

mikä yksinkertaisen sieventämisen jälkeen muuttuu aritmeettis-geometriseksi epäyhtälöksi.

Geometris-harmonisen epäyhtälön todistus. Tämä seuraa helposti aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä.

Olkoot a_1, a_2, ..., a_n positiivisia reaalilukuja. Tällöin niiden käänteisluvut $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, ..., $\frac{1}{a_n}$ ovat myös positiivisia, ja soveltamalla niihin aritmeettis-geometrista epäyhtälöä saamme

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Ottamalla puolittain käänteisluvut saamme välittömästi

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Tšebyšovin epäyhtälö

Huomaamme ensin, että

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_i - a_i b_j) &= \sum_{i=1}^{n} \left(n a_i b_i - a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \right) \\ &= n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j = n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i, \end{aligned}$$

ja että

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_j b_j - a_j b_i) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j - \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_i \right) \\ &= n \sum_{j=1}^{n} a_j b_j - \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} b_i = n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i. \end{aligned}$$

Näistä seuraa, että

$$\begin{aligned} n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_i - a_i b_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_j b_j - a_j b_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_i - a_i b_j + a_j b_j - a_j b_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \big((a_i - a_j)(b_i - b_j) \big). \end{aligned}$$

Mutta Tšebyšovin epäyhtälön oletusten nojalla $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. (Ehtojen $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ sekä $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ vuoksi vasemman puolen molemmat tulontekijät ovat aina samanmerkkiset.) Täten $n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \geqslant 0$. Siirtämällä vasemman puolen toinen termi oikealle puolelle ja jakamalla puolittain luvun n neliöllä saamme Tšebyšovin epäyhtälön.

Ei ole vaikea havaita, että Tšebyšovin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ tai $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$. Tämä seuraa arvioista $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0$ $(i, j \in \{1, 2, \ldots, n\})$. Sen havaitseminen, että epäyhtälö vallitsee toisin päin kun $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ ja $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, ei ole yhtään vaikeampaa. Nimittäin Tšebyšovin epäyhtälön toinen puoli seuraa tässä tapauksessa epäyhtälöistä $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leqslant 0$, jotka pätevät jälleen kaikilla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. (Tällä kerralla tulontekijöiden merkit ovat väistämättä vastakkaismerkkiset.)

Toinen todistus. Osoitamme kuinka Tšebyšovin epäyhtälö seuraa helposti uudelleenjärjestysepäyhtälöstä. Tšebyšovin epäyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqslant n\,(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)\,.$$

Kun kerromme tässä vasemman puolen auki saamme n^2 termiä. Järjestämällä ne seuraavasti n ryhmään:

$$\begin{aligned}(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) + (a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_1) + \ldots \\ + (a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1})\,,\end{aligned}$$

saamme, että uudelleenjärjestysepäyhtälön nojalla lauseke $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ on aina suurempaa tai yhtäsuurta kuin mikä tahansa näistä n summasta, ja Tšebyšovin epäyhtälö seuraa. Samalla menetelmällä voimme osoittaa helposti myös Tšebyšovin epäyhtälön toisen puolen.

Uudelleenjärjestysepäyhtälö

Aloitamme osoittamalla epäyhtälön tapauksessa $n = 2$. Olkoot $a_1 \leqslant a_2$ ja $b_1 \leqslant b_2$ reaalilukuja. Tällöin $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geqslant 0$, sillä molemmat vasemman puolen tulontekijät ovat varmasti ei-negatiivisia. Kertomalla vasen puoli auki ja järjestelemällä termejä uudelleen näemme, että $a_1b_1 + a_2b_2 \geqslant a_1b_2 + a_2b_1$, mikä onkin täsmälleen uudelleenjärjestysepäyhtälö tapauksessa $n = 2$. Havaitsemme, että tässä pätee yhtäsuuruus täsmälleen silloin kun $a_1 = a_2$ tai $b_1 = b_2$.

Seuraavaksi siirrymme yleiseen tapaukseen. Olkoot $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ sekä $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reaalilukuja. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellainen lukujen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ permutaatio että lausekkeen $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ arvo on suurin mahdollinen. Olettakaamme, että joillakin indeksien $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ arvoilla pätee $i < j$ ja $a_i > a_j$. Tällöin $a_ib_j + a_jb_i \geqslant a_ib_i + a_jb_j$ (jo todistetun kahden muuttujan tapauksen nojalla), ja lausekkeen $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ arvo ei siis voi olla suurin mahdollinen ellei $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, tai ellei $b_i = b_j$ kaikilla niillä indeksien i ja j arvoilla joilla $i < j$ ja $a_i > a_j$. Jälkimmäisessä tapauksessa lukuparien a_i ja a_j järjestystä voidaan vaihtaa siten, että saamme epäyhtälöt $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ pätemään. Siispä lausekkeen $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ arvo on suurin mahdollinen silloin kun $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$.

Lopuksi huomautamme, että koska lausekkeen

$$-\,(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) = (-a_1)\,b_1 + (-a_2)\,b_2 + \ldots + (-a_n)\,b_n$$

arvo on suurin mahdollinen täsmälleen silloin kun $-a_1 \leqslant -a_2 \leqslant \ldots \leqslant -a_n$, näemme, että lausekkeen $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ arvo on pienin silloin kun $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$.

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö

Olkoot a_1, a_2, …, a_n sekä b_1, b_2, …, b_n reaalilukuja. Jos $a_1 = \ldots = a_n = 0$, niin epäyhtälö varmasti pätee yhtäsuuruusmerkillä ja lukujonot $\langle a_1, a_2 \ldots, a_n \rangle$ ja $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ ovat verrannolliset. Voimme siis olettaa, etteivät kaikki luvut a_1, a_2, …, a_n ole nollia.

Tarkastelkaamme sitten reaalimuuttujan x polynomia

$$\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell x + b_\ell)^2 = \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell b_\ell \right) x + \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^2.$$

Koska $\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell x + b_\ell)^2 \geqslant 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, on selvästi myös

$$\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell b_\ell \right) x + \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^2 \geqslant 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Täten kyseisen toisen asteen polynomin diskriminantin täytyy olla ei-positiivinen, eli on oltava

$$4 \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell b_\ell \right)^2 - 4 \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^2 \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^2 \leqslant 0.$$

Siirtämällä vasemman puolen toisen termin oikealle puolelle ja jakamalla puolittain neljällä saamme Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön.

Lopuksi, epäyhtälöstä $\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell x + b_\ell)^2 \geqslant 0$, joka siis pätee kaikille $x \in \mathbb{R}$, seuraa, että Cauchyn–Schwarzin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus täsmälleen silloin kun lukujonot $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ ja $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ ovat verrannolliset.

Tekstin viimeisessä luvussa on esitetty vaihtoehtoinen todistus.

Hölderin epäyhtälö

Hölderin epäyhtälön voi kirjoittaa muodossa

$$\sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{a_\ell^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{b_\ell^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant 1.$$

Koska $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, voimme käyttää tämän luvun ensimmäisessä kappaleessa todistettua aritmeettis-geometrisen epäyhtälön yleistystä mielivaltaisille painokertoimille saaden täten

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{a_\ell^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{b_\ell^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\qquad \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{a_\ell^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_\ell^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Lisäksi edellä sovelletun aritmeettis-geometrisen epäyhtälön version yhtäsuuruusehdosta seuraa, että yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin kun lukujonot $\langle a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p \rangle$ ja $\langle b_1^q, b_2^q, \ldots, b_n^q \rangle$ ovat verrannolliset.

Osoitamme seuraavaksi hyödyllisen lisätuloksen: jos Hölderin epäyhtälössä toisen parametreista p ja q annetaan olla negatiivinen niin epäyhtälön suunta vaihtuu. Oletetaan vaikkapa, että $p < 0$, ja asetetaan $S = -\frac{p}{q}$ ja $T = \frac{1}{q}$. Tällöin luvut S ja T ovat molemmat positiivisia ja $\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = 1$. Asetetaan seuraavaksi $u_\ell = a_\ell^{-q}$ ja $v_\ell = a_\ell^q b_\ell^q$, kaikille $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jolloin Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell v_\ell \leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell^S \right)^{\frac{1}{S}} \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{n} v_\ell^T \right)^{\frac{1}{T}},$$

mikä tietenkin on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^{-q} a_\ell^q b_\ell^q \leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^{-q \cdot \left(-\frac{p}{q}\right)} \right)^{-\frac{q}{p}} \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell^q b_\ell^q)^{\frac{1}{q}} \right)^{q}.$$

Pienen sieventämisen ja uudelleenjärjestelyn jälkeen voimme ottaa puolittain q-asteisen juuren saaden

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell b_\ell \geqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

mikä on täsmälleen haluttu käänteinen epäyhtälö.

Minkowskin epäyhtälö

Huomaamme ensin, että

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell + b_\ell)^r &= \sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell + b_\ell)(a_\ell + b_\ell)^{r-1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \, (a_\ell + b_\ell)^{r-1} + \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \, (a_\ell + b_\ell)^{r-1}.\end{aligned}$$

Kun $r > 1$, valitsemme luvun s siten, että $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, eli asetamme $s = \frac{r}{r-1}$. Soveltamalla Hölderin epäyhtälöä kahteen viimeksi saamaamme termiin saamme

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell + b_\ell)^r \\ &\leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^r \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell + b_\ell)^{(r-1)\cdot s} \right)^{\frac{1}{s}} + \left(\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^r \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell + b_\ell)^{(r-1)\cdot s} \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell^r \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell + b_\ell)^r \right)^{\frac{r-1}{r}} + \left(\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^r \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell + b_\ell)^r \right)^{\frac{r-1}{r}}.\end{aligned}$$

Saamme tästä Minkowskin epäyhtälön yksinkertaisesti jakamalla puolittain lausekkeella $\left(\sum_{\ell=1}^{n} (a_\ell + b_\ell)^r\right)^{\frac{r-1}{r}}$.

Minkowskin epäyhtälö pätee selvästi myös silloin kun $r = 1$; epäyhtälön molemmat puolet ovat tällöin yhtäsuuret. Kun $r > 1$, yhtäsuuruus vallitsee täsmälleen silloin kun lukujonot $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ ja $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ ovat verrannolliset. Tämä seuraa Hölderin epäyhtälön vastaavasta ehdosta.

Kun $r < 1$ ja $r \neq 0$, luku s muuttuu negatiiviseksi, ja Minkowskin epäyhtälössä epäyhtälömerkki kääntyy toisin päin. Tämä seuraa siitä, että Hölderin epäyhtälön merkki kääntyy kun $s < 0$.

Jensenin epäyhtälö

Tulemme todistamaan Jensenin epäyhtälön vain positiivisille rationaaliluvuille $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Yleinen todistus mielivaltaisille ei-negatiivisille reaaliluvuille α_1, α_2, …, α_n edellyttäisi vakavampia analyyttisiä argumentteja.

Jaamme Jensenin epäyhtälön todistuksen kahteen tapaukseen.

Tapaus 1: $\alpha_\ell = \frac{1}{n}$, $\ell = 1, 2, \ldots, n$. (Käytämme samaa menetelmää kuin ensimmäisessä aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistuksessamme.)

Tässä tapauksessa tarkoituksemme on todistaa epäyhtälö

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} f(x_\ell)\,. \tag{1}$$

Tämä epäyhtälö pitää paikkaansa kun $n = 2$, suoraan konveksisuuden määritelmän perusteella. Oletetaan sitten, että epäyhtälö (1) pätee jollakin $n = 2^k$, missä $k = 1, 2, \ldots$. Osoitamme ensin, että epäyhtälö (1) pätee myös $m = 2^{k+1} = 2n$ muuttujalle.

Todistus. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_m \in I$. Tällöin

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}\right) &= f\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_{n+\ell}}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{f\big(\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell\big) + f\big(\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_{n+\ell}\big)}{2} \\ &\leqslant \frac{\sum_{\ell=1}^{n} f(x_\ell) + \sum_{\ell=1}^{n} f(x_{n+\ell})}{2n} = \frac{\sum_{\ell=1}^{m} f(x_\ell)}{m}. \end{aligned}$$

Yllä olevassa epäyhtälöketjussa ensimmäinen epäyhtälö pätee koska (1) pätee kun $n = 2$. (Luvut $\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell$ ja $\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_{n+\ell}$ kuuluvat välille I, sillä ne ovat välille I kuuluvien lukujen keskiarvoja.) Toinen arvio seuraa oletuksestamme. Koska epäyhtälö (1) pätee kun $n = 2$, se pätee induktiolla kaikille $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Oletetaan seuraavaksi, että epäyhtälö (1) pätee jollakin $n > 2$. Osoitamme seuraavaksi, että (1) pätee myös $n - 1$ muuttujalle.

Todistus. Olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in I$. Induktio-oletuksemme sanoo, että luvuille x_1, x_2, …, x_{n-1}, sekä

$$x_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$$

pätee

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)$$
$$\leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right)}{n}. \quad (2)$$

Sieventämisen jälkeen tämän vasen puoli muuttuu muotoon $f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right)$. Täten,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1} f(x_\ell) + \frac{1}{n} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right).$$

Lisäsieventäminen antaa

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-1} f(x_\ell)\,.$$

Jälleen, induktiolla näemme, että (1) pätee tapauksessa 1.

Tapaus 2: Olkoot α_1, α_2, ..., α_n positiivisia rationaalilukuja. Laventamalla nähdään, että on olemassa luonnollinen luku m, sekä negatiiviset kokonaisluvut $p_1, p_2, \ldots, p_n$, joille $m = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ sekä $\alpha_\ell = \frac{p_\ell}{m}$ jokaiselle $\ell = 1, 2, \ldots, n$.

Tapauksesta 1 seuraa, että

$$f\left(\frac{(x_1 + \ldots + x_1) + \ldots + (x_n + \ldots + x_n)}{m}\right)$$
$$\leqslant \frac{\big(f(x_1) + \ldots + f(x_1)\big) + \ldots + \big(f(x_m) + \ldots + + f(x_m)\big)}{m}, \quad (1)$$

missä ensimmäisessä summassa on p_1 termiä, toisessa summassa p_2 termiä, ja niin edelleen. Mutta tämän epäyhtälön voi tietysti kirjoittaa muodossa

$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{n} p_\ell x_\ell\right) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{n} p_\ell f(x_\ell)\,,$$

ja (1) on todistettu tapauksessa 2.

Potenssikeskiarvojen epäyhtälö

Lähtökohtamme on itsestäänselvä: kun $k = m$, yhtäsuuruus pätee, eli myös epäyhtälö pätee tässä tapauksessa. Oletetaan sitten, että $k < m$. Tällöin $\frac{m}{k} > 1$ ja funktio $f(x) = x^{\frac{m}{k}}$ on aidosti konveksi kun $x \geqslant 0$. (Onhan $f''(x) = \frac{m}{k}\left(\frac{m}{k} - 1\right) x^{\frac{m}{k}-2} > 0$, kun $x > 0$.) Nyt, koska luvut a_1, a_2, ..., a_n ovat ei-negatiivisia, luvut a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k ovat myös ei-negatiivisia. Jensenin epäyhtälö antaa meille arvion

$$\frac{1}{n}\left(a_1^k\right)^{\frac{m}{k}} + \frac{1}{n}\left(a_2^k\right)^{\frac{m}{k}} + \ldots + \frac{1}{n}\left(a_n^k\right)^{\frac{m}{k}} \geqslant \left(\frac{1}{n}a_1^k + \frac{1}{n}a_2^k + \ldots + \frac{1}{n}a_n^k\right)^{\frac{m}{k}},$$

mikä pienen sieventämisen jälkeen saa muodon

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n} \geqslant \left(\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}\right)^{\frac{m}{k}}.$$

Potenssikeskiarvojen versio seuraa nyt ottamalla tästä puolittain m juuret.

Yhtäsuuruusehto seuraa Jensenin epäyhtälön vastaavasta ehdosta.

Schurin epäyhtälö

Johdamme Schurin epäyhtälön vahvemmasta tuloksesta.

Lause 2. Jos a, b, c, u, v ja w ovat ei-negatiivisia reaalilukuja, p on positiivinen reaaliluku, ja

$$a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}} \leqslant b^{\frac{1}{p}}, \quad \text{ja} \quad u^{\frac{1}{p+1}} + w^{\frac{1}{p+1}} \geqslant v^{\frac{1}{p+1}}, \tag{1}$$

niin

$$ubc - vca + wab \geqslant 0. \tag{2}$$

Todistus. Lähdemme liikkeelle kahdesta ei-negatiivisten reaalilukujen parista $\left\langle a^{\frac{1}{p+1}}, c^{\frac{1}{p+1}} \right\rangle$ sekä $\left\langle (uc)^{\frac{1}{p+1}}, (wa)^{\frac{1}{p+1}} \right\rangle$. Koska $p > 0$, on myös oltava

$$\frac{1}{p+1} > 0, \quad \frac{p}{p+1} > 0, \quad \text{ja} \quad \frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1} = 1.$$

Hölderin epäyhtälön nojalla siis

$$\begin{aligned} &a^{\frac{1}{p+1}} (uc)^{\frac{1}{p+1}} + c^{\frac{1}{p+1}} (wa)^{\frac{1}{p+1}} \\ &\qquad \leqslant \left(a^{\frac{1}{p+1}\cdot\frac{p+1}{p}} + c^{\frac{1}{p+1}\cdot\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \cdot \left((uc)^{\frac{1}{p+1}\cdot(p+1)} + (wa)^{\frac{1}{p+1}\cdot(p+1)}\right)^{\frac{1}{p+1}}, \end{aligned}$$

eli

$$(ac)^{\frac{1}{p+1}} u^{\frac{1}{p+1}} + (ac)^{\frac{1}{p+1}} w^{\frac{1}{p+1}} \leqslant \left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \cdot (uc + wa)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Korottamalla puolittain potenssiin $p + 1$, saamme epäyhtälön

$$ac\left(u^{\frac{1}{p+1}} + w^{\frac{1}{p+1}}\right)^{p+1} \leqslant \left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^{p} (uc + wa).$$

Lopuksi, käyttämällä ehtoja (1) saamme epäyhtälön

$$ac\left(v^{\frac{1}{p+1}}\right)^{p+1} \leqslant \left(b^{\frac{1}{p}}\right)^{p} (uc + wa),$$

mikä on yhtäpitävä vaaditun epäyhtälön (2) kanssa.

Nyt voimme rauhassa olettaa, että $0 \leqslant z \leqslant y \leqslant x$, jolloin käyttämällä lausetta 2 luvuille

$$p = 1,\ a = y - z,\ b = x - z,\ c = x - y,\ u = x^r,\ v = y^r,\ \text{ja}\ w = z^r,$$

näemme, että

$$x^r (x - z)(x - y) - y^r (x - y)(y - z) + z^r (y - z)(x - z) \geqslant 0,$$

mikä onkin haluttu Schurin epäyhtälö.

On varsin helppoa näyttää, että Schurin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $x = y = z$. Ainoa Schurin epäyhtälön vasemman puolen kolmesta termistä, joka voi olla negatiivinen, on $y^r\,(y-x)(y-z)$. Jos se on negatiivinen, on $z < y < x$. Mutta näillä ehdoilla myös

$$x^r\,(x-z)(x-y) > y^r\,(y-x)(y-z)\,.$$

Täten yhtäsuuruuden vallitessa on oltava $y = x$ tai $y = z$. Kummassakin tapauksessa Schurin epäyhtälön vasemman puolen kolmesta termistä ainakin kaksi häviävät, mistä seuraa, että $x = y = z$.

MacLaurinin epäyhtälö

Aloitamme todistamalla seuraavan tuloksen, jota tulemme käyttämään MacLaurinin epäyhtälön todistuksessamme.

Lause 3. Olkoon $n \geqslant 2$ ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja, jotka eivät kaikki ole keskenään yhtä suuria. Merkitään $p_0 = 1$ ja

$$p_r = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n} \frac{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_r}}{\binom{n}{r}}, \quad \text{kun } r = 1, 2, \ldots, n.$$

Tällöin jokaisella $r = 1, 2, \ldots, n-1$ pätee

$$p_{r-1} p_{r+1} < p_r^2.$$

Todistus (induktiolla). Kun $n = 2$, on

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad \text{ja} \quad p_2 = a_1 a_2,$$

eli

$$p_0 p_2 = a_1 a_2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 = p_1^2,$$

missä on tietenkin käytetty aritmeettis-geometrista epäyhtälöä, ja missä yhtäsuuruus ei voi päteä oletuksen $a_1 \neq a_2$ takia.

Oletetaan seuraavaksi, että väitetty lause pätee jollakin $n = k - 1$, missä $k \geqslant 3$. Osoitamme, että silloin se pätee myös kun $n = k$. Selkeyden vuoksi merkitsemme tapauksessa $n = k$ lukuja p_0, p_1 ... edelleen p_0, p_1, …, mutta tapauksessa $n = k - 1$ merkitsemme niitä P_0, P_1, … .

Tekemiemme oletusten nojalla positiivisille reaaliluvuille a_1, a_2, …, a_{k-1}, jotka eivät ole kaikki keskenään yhtä suuria, pätee $P_{r-1} P_{r+1} < P_r^2$ jokaisella $r = 1, 2, \ldots, k-2$. Tehtävämme on osoittaa, että positiivisille reaaliluvuille a_1, a_2, …, a_k, jotka eivät ole kaikki keskenään yhtä suuria, pätee $p_{r-1} p_{r+1} < p_r^2$ jokaisella $r = 1, 2, \ldots, k-1$.

Havaitkaamme, että

$$p_r = \frac{k-r}{k} P_r + \frac{r}{k} a_k P_{r-1} \quad \text{jokaisella} \quad r = 1, 2, \ldots, k,$$

missä merkitsemme $P_k = 0$. (Tämä voi olla hieman hankalaa huomata, mutta seuraa esimerkiksi siitä että $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.) Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} &k^2\left(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2\right) \\ &\quad = k^2\Bigg(\left(\frac{k-r+1}{k}P_{r-1} + \frac{r-1}{k}a_kP_{r-2}\right)\left(\frac{k-r-1}{k}P_{r+1} + \frac{r+1}{k}a_kP_r\right) \\ &\qquad\qquad - \left(\frac{k-r}{k}P_r + \frac{r}{k}a_kP_{r-1}\right)^2\Bigg) = A + Ba_k + Ca_k^2, \quad (1) \end{aligned}$$

missä

$$\begin{cases} A = \left((k-r)^2 - 1\right) P_{r-1}P_{r+1} - (k-r)^2 P_r^2, \\ B = (k-r+1)(r+1)\, P_{r-1}P_r + (k-r-1)(r-1)\, P_{r-2}P_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -2\,(k-r)\, rP_rP_{r-1}, \\ C = \left(r^2-1\right) P_{r-2}P_r - r^2P_{r-1}^2. \end{cases}$$

Koska luvut a_1, a_2, ..., a_{k-1} eivät ole yhtä suuria, on oltava

$$P_{r-1}P_{r+1} < P_r^2, \quad P_{r-2}P_r < P_{r-1}^2, \quad \text{ja} \quad P_{r-2}P_{r+1} < P_{r-1}P_r.$$

Viimeinen näistä pätee koska

$$P_{r-2}P_{r+1} = P_{r-2}P_r\frac{P_{r+1}}{P_r} < P_{r-1}^2\frac{P_{r+1}}{P_r} = \frac{P_{r-1}P_{r-1}P_{r+1}}{P_r} < \frac{P_{r-1}P_r^2}{P_r} = P_{r-1}P_r.$$

Näistä epäyhtälöistä seuraa, että

$$A < -P_r^2, \quad B < 2P_{r-1}P_r, \quad \text{ja} \quad C < -P_{r-1}^2.$$

Lisäksi, identiteetistä (1) seuraa, että

$$k^2\left(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2\right) < -P_r^2 + 2P_rP_{r-1}a_k - P_{r-1}^2a_k^2 = -\left(P_r - P_{r-1}a_k\right)^2 \leqslant 0.$$

Täten $k^2\left(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2\right) < 0$, mikä on yhtäpitävä epäyhtälön $p_{r-1}p_{r+1} < p_r^2$ kanssa, ja lause on todistettu kaikille $n \geqslant 2$.

Yksi tapaus on tosin vielä jäljellä; nimittäin se tapaus, missä $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} \neq a_k$. Tässä tapauksessa $a_1 = \frac{P_r}{P_{r-1}}$, ja identiteetistä (1) näemme, että

$$k^2\left(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2\right) = -a_1^2P_{r-1}^2 + 2a_1P_{r-1}^2a_k - P_{r-1}^2a_k^2 = -\left(a_1 - a_k\right)^2 P_{r-1}^2 < 0.$$

Lause on siis todistettu myös tässä tapauksessa.

MacLaurinin epäyhtälön todistus. Tarkastelkaamme epäyhtälöitä

$$p_0p_2 < p_1^2, \quad (p_1p_3)^2 < p_2^4, \quad (p_2p_4)^3 < p_3^6, \quad \ldots, \quad (p_{r-1}p_{r+1})^r < p_r^{2r}.$$

Jos kerromme nämä keskenään puolittain, saamme epäyhtälön

$$p_0\, p_1^2\, p_2^4\, p_3^6 \cdots p_{r-1}^{2r-2}\, p_r^{r-1}\, p_{r+1}^r < p_1^2\, p_2^4\, p_3^6 \cdots p_{r-1}^{2r-2}\, p_r^{2r},$$

mistä seuraa, että $p_{r+1}^r < p_r^{r+1}$, mikä taas voidaan myös kirjoittaa muotoon $\sqrt[r]{p_r} > \sqrt[r+1]{p_{r+1}}$. Täten

$$p_1 > \sqrt{p_2} > \sqrt[3]{p_3} > \ldots > \sqrt[n-1]{p_{n-1}} > \sqrt[n]{p_n},$$

mikä on MacLaurinin epäyhtälö.

Tapauksessa $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ pätee $p_1 = \sqrt{p_2} = \sqrt[3]{p_3} = \ldots = \sqrt[n-1]{p_{n-1}} = \sqrt[n]{p_n}$. Tämä on helppo osoittaa:

$$\begin{aligned}\sqrt[k-1]{p_{k-1}} = \sqrt[k-1]{\frac{1}{\binom{n}{k-1}}\binom{n}{k-1}a_1^{k-1}} = a_1 \\ = \sqrt[k]{\frac{1}{\binom{n}{k}}\binom{n}{k}a_1} = \sqrt[k]{\frac{1}{\binom{n}{k}}\binom{n}{k}a_1^k} = \sqrt[k]{p_k}.\end{aligned}$$

Muirheadin epäyhtälö

Aloitamme seuraavalla lemmalla:

Lemma. Olkoot a_1, a_2, b_1, b_2 ei-negatiivisia reaalilukuja, joille $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ ja $\max\{a_1, a_2\} \geqslant \max\{b_1, b_2\}$. Olkoot lisäksi x ja y ei-negatiivisia reaalilukuja. Tällöin

$$x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} \geqslant x^{b_1}y^{b_2} + x^{b_2}y^{b_1}. \qquad (0)$$

Todistus. Symmetrian vuoksi voimme olettaa, että $a_1 \geqslant a_2$ ja $b_1 \geqslant b_2$. Jos ainakin toinen luvuista x ja y häviää, niin varmasti (0) pätee. Voimme siis olettaa, että $xy \neq 0$. Nyt voimme päätellä seuraavasti:

$$\begin{aligned}&x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} - x^{b_1}y^{b_2} - x^{b_2}y^{b_1} \\ &\quad = x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{a_1-a_2} + y^{a_1-a_2} - x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2} - x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2}\right) \\ &\quad = x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{b_1-a_2} - y^{b_1-a_2}\right)\left(x^{b_2-a_2} - y^{b_2-a_2}\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Miksi epäyhtälö $x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{b_1-a_2} - y^{b_1-a_2}\right)\left(x^{b_2-a_2} - y^{b_2-a_2}\right) \geqslant 0$ pätee? Selvästi $x^{a_2}y^{a_2} \geqslant 0$, ja lisäksi $b_1 - a_2 \geqslant 0$ ja $b_2 - a_2 \geqslant 0$. Jos $x \geqslant y$, niin $x^{b_1-a_2} - y^{b_1-a_2} \geqslant 0$ ja $x^{b_2-a_2} - y^{b_2-a_2} \geqslant 0$, ja haluttu epäyhtälö seuraa. Jos sitä vastoin $x \leqslant y$, niin $x^{b_1-a_2} - y^{b_1-a_2} \leqslant 0$ ja $x^{b_2-a_2} - y^{b_2-a_2} \leqslant 0$, ja jälleen haluttu epäyhtälö seuraa.

Jaamme Muirheadin epäyhtälön todistuksen kahteen eri tapaukseen.

Tapaus 1: $b_1 \geqslant a_2$.

Oletusten nojalla $a_1 \geqslant a_1 + a_2 - b_1$ ja $a_1 \geqslant b_1$. Siispä $\max\{a_1, a_2\} \geqslant \max\{a_1 + a_2 - b_1, b_1\}$. Lisäksi $a_1 + a_2 = (a_1 + a_2 - b_1) + b_1$. Lemman nojalla saamme $x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} \geqslant x^{a_1+a_2-b_1}y^{b_1} + x^{b_1}y^{a_1+a_2-b_1}$. Selvästi myös epäyhtälö

$$z^{a_3}\left(x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1}\right) \geqslant z^{a_3}\left(x^{a_1+a_2-b_1}y^{b_1} + x^{b_1}y^{a_1+a_2-b_1}\right)$$

pätee. Tästä päättelemme, että myös

$$\sum_{\text{cyc}} z^{a_3}\left(x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1}\right) \geqslant \sum_{\text{cyc}} z^{a_3}\left(x^{a_1+a_2-b_1}y^{b_1} + x^{b_1}y^{a_1+a_2-b_1}\right). \qquad (1)$$

(Käyttäessämme lemmaa voisimme esimerkiksi soveltaa sitä luvuilla y ja z lukujen x ja y sijaan ja kertoa puolittain luvulla x^{a_3} luvun z^{a_3} sijaan.)

Nyt huomaamme, että

$$\sum_{\text{cyc}} z^{a_3}\left(x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}\right)=\sum_{\text{sym}} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}.$$

Oletusten nojalla myös $a_1+a_2-b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3$, mistä seuraa, että pätee myös $\max\{a_1+a_2-b_1, a_3\} \geqslant \max\{b_2, b_3\}$. Lisäksi $(a_1+a_2-b_1)+a_3=b_2+b_3$. Käyttämällä lemmaa vielä kerran saamme epäyhtälön

$$y^{a_1+a_2-b_1}z^{a_3}+y^{a_3}z^{a_1+a_2-b_1} \geqslant y^{b_2}z^{b_3}+y^{b_3}z^{b_2}.$$

Samoin kuin aiemmin voimme nyt päätellä, että myös

$$\sum_{\text{cyc}} x^{b_1}\left(y^{a_1+a_2-b_1}z^{a_3}+y^{a_3}z^{a_1+a_2-b_1}\right) \geqslant \sum_{\text{cyc}} x^{b_1}\left(y^{b_2}z^{b_3}+y^{b_3}z^{b_2}\right), \tag{2}$$

ja että

$$\sum_{\text{cyc}} x^{b_1}\left(y^{b_2}z^{b_3}+y^{b_3}z^{b_2}\right)=\sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$

Lopuksi, epäyhtälön (1) oikea puoli on yhtä suuri kuin epäyhtälön (2) vasen puoli, mistä Muirheadin epäyhtälö seuraa.

Tapaus 2. $b_1 \leqslant a_2$.

Oletusten nojalla $3b_1 \geqslant b_1+b_2+b_3=a_1+a_2+a_3 \geqslant b_1+a_2+a_3$, mistä seuraa, että $b_1 \geqslant a_2+a_3-b_1$. Lisäksi $a_2 \geqslant b_1$, mistä seuraa, että $\max\{a_2, a_3\} \geqslant \max\{b_1, a_2+a_3-b_1\}$, ja huomaamme, että $a_2+a_3=b_1+(a_2+a_3-b_1)$. Nyt lemmasta seuraa, että

$$y^{a_2}z^{a_3}+y^{a_3}z^{a_2} \geqslant y^{b_1}z^{a_2+a_3-b_1}+y^{a_2+a_3-b_1}z^{b_1}.$$

Samassa hengessä kuin aiemminkin, näemme ongelmitta, että myös

$$\sum_{\text{cyc}} x^{a_1}\left(y^{a_2}z^{a_3}+y^{a_3}z^{a_2}\right) \geqslant \sum_{\text{cyc}} x^{a_1}\left(y^{b_1}z^{a_2+a_3-b_1}+y^{a_2+a_3-b_1}z^{b_1}\right). \tag{3}$$

Huomaamme, että

$$\sum_{\text{cyc}} x^{a_1}\left(y^{a_2}z^{a_3}+y^{a_3}z^{a_2}\right)=\sum_{\text{sym}} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}.$$

Tehtyjen oletusten nojalla myös $\max\{a_1, a_2+a_3-b_1\} \geqslant \max\{b_2, b_3\}$. Lisäksi $a_1+(a_2+a_3-b_1)=b_2+b_3$, ja käyttämällä lemmaa vielä yhden kerran saamme, että

$$x^{a_1}z^{a_2+a_3-b_1}+x^{a_2+a_3-b_1}z^{a_1} \geqslant x^{b_2}z^{b_3}+x^{b_3}z^{b_2},$$

ja huomaamme, että

$$\sum_{\text{cyc}} y^{b_1}\left(x^{a_1}z^{a_2+a_3-b_1}+x^{a_2+a_3-b_1}z^{a_1}\right) \geqslant \sum_{\text{cyc}} y^{b_1}\left(x^{b_2}z^{b_3}+x^{b_3}z^{b_2}\right). \tag{4}$$

Näemme, että

$$\sum_{\text{cyc}} y^{b_1}\left(x^{b_2}z^{b_3}+x^{b_3}z^{b_2}\right)=\sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$

Samoin kuin tapauksessa 1, näemme että epäyhtälön (3) oikea puoli on yhtä suuri kuin epäyhtälön (4) vasen puoli, ja Muirheadin epäyhtälö seuraa.

Ratkaisuita ensimmäisiin harjoitustehtäviin

1. Vihjettä käyttämällä huomaamme, että

$$\begin{aligned}\bigl(x+y^3\bigr)\bigl(y+z^3\bigr)\bigl(z+x^3\bigr) &\geqslant (x+4y)(y+4z)(z+4x)\\ &= (x+y+y+y+y)(y+z+z+z+z)(z+x+x+x+x)\,.\end{aligned}$$

Nyt, käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä jokaiseen tekijään erikseen, saadaan

$$\begin{aligned}&(x+y+y+y+y)(y+z+z+z+z)(z+x+x+x+x)\\ &\qquad\geqslant 5\sqrt[5]{xy^4}\cdot 5\sqrt[5]{yz^4}\cdot 5\sqrt[5]{zx^4} = 125xyz.\end{aligned}$$

2. Soveltamalla aritmeettis-geometrista epäyhtälöä todistettavan epäyhtälön vasemman puolen jokaisen termin nimittäjään saadaan

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leqslant\frac{x}{2\sqrt{x^4y^2}}+\frac{y}{2\sqrt{y^4x^2}}=\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}=\frac{1}{xy}.$$

3. Soveltamalla aritmeettis-geometrista epäyhtälöä todistettavan epäyhtälön vasempaan puoleen saadaan ensin

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{256}{abcd}}=\frac{16}{\sqrt[4]{abcd}}.$$

Käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä uudelleen, tällä kertaa nimittäjään, saadaan

$$\frac{16}{\sqrt[4]{abcd}}\geqslant\frac{16}{\frac{1}{4}(a+b+c+d)}=\frac{64}{a+b+c+d}.$$

4. Havaitaan ensin, että

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) &= 1+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+1\\ &= -1+\left(\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\right).\end{aligned}$$

Käyttämällä sitten aritmeettis-geometrista epäyhtälöä jokaiseen tekijään, saadaan

$$-1+\left(\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\right)\geqslant -1+3\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Nyt tarvitsee enään osoittaa, että

$$-1+3\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right),$$

eli, toisin sanoen, että $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant 3$. Tämä tietysti pitää paikkaansa, koska se on vain aritmeettis-geometrinen epäyhtälö kolmelle muuttujalle.

5. Aloitamme, kuten vihje ehdottaa, osoittamalla, että $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$. Muuttujanvaihtojen $x^2=a$, $y^2=b$ ja $z^2=c$ jälkeen tämä saa muodon $a+b+c\geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$. Nyt, käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä jokaiseen oikean puolen termiin, saadaan

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leqslant\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c.$$

(He, jotka ovat tutustuneet uudelleenjärjestysepäyhtälöön saattavat pitää yllä esitettyä todistusta tarpeettomana, koska sillä saatu epäyhtälö on vain helppo suuruusjärjestysepäyhtälön seuraus.)

Nyt voimme osoittaa, että $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\geqslant 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$. Käyttämällä vihjeen epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx&\geqslant 2\left(xy+yz+zx\right)\\&=2\left(\frac{xy+xz}{2}+\frac{xy+yz}{2}+\frac{xz+yz}{2}\right).\end{aligned}$$

Lopuksi, käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä jokaiseen sulkeiden sisällä olevan lausekkeen termiin, saadaan

$$\begin{aligned}&2\left(\frac{xy+xz}{2}+\frac{xy+yz}{2}+\frac{xz+yz}{2}\right)\geqslant 2\left(\sqrt{x\cdot xyz}+\sqrt{y\cdot xyz}+\sqrt{z\cdot xyz}\right)\\&\quad=2\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\right)=2\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\geqslant 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right).\end{aligned}$$

6. Aloitamme vihjeestä $1-y_\ell=\sum_{k\neq\ell}y_k$. Käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä tämän identiteetin oikeaan puoleen, saadaan

$$1-y_\ell\geqslant(n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{k\neq\ell}y_k}.$$

Tietysti tämä pätee jokaisella ℓ ($\ell=1,2,\ldots,n$), mikä tarkoittaa sitä, että meillä on nyt n epäyhtälöä jotka ovat yllä olevaa muotoa. Kertomalla nämä puolittain keskenään saadaan, että

$$\prod_{\ell=1}^{n}(1-y_\ell)\geqslant(n-1)^n\prod_{\ell=1}^{n}y_\ell.$$

Jakamalla puolittain tulolla $\prod_{\ell=1}^{n} y_\ell$ nähdään, että

$$\prod_{\ell=1}^{n} \frac{1-y_\ell}{y_\ell} \geqslant (n-1)^n .$$

Mutta nyt

$$\frac{1-y_\ell}{y_\ell} = \frac{1-\frac{1998}{x_\ell+1998}}{\frac{1998}{x_\ell+1998}} = \frac{x_\ell+1998-1998}{1998} = \frac{x_\ell}{1998}.$$

Olemme siis osoittaneet, että

$$\prod_{\ell=1}^{n} \frac{x_\ell}{1998} \geqslant (n-1)^n ,$$

mikä pienen sieventämisen jälkeen muuttuu siksi epäyhtälöksi joka oli todistettava.

7. Vihjeen mainitseman helpon epäyhtälön todistusta varten katso harjoitustehtävää 5.

Käyttämällä aritmeettis-harmonista epäyhtälöä vasempaan puoleen, saadaan

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{9}{3+ab+bc+ca}.$$

Nyt vihjeen epäyhtälöä käyttämällä saadaan

$$\frac{9}{3+ab+bc+ca} \geqslant \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

8. Aloitamme osoittamalla, että $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$, kun $t > 0$. Nimittäin, käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä vasempaan puoleen, saadaan

$$t + \frac{1}{t} \geqslant 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2.$$

Seuraavaksi tarkastelemme varsinaista todistettavaa arviota. Aloitamme huomaamalla, että kaikki nimittäjät ovat positiivisia. Vähentämällä puolittain termi x_n, ja kirjoittamalla näin saatu uusi vasen puoli uudelleen todistettava epäyhtälö saa muodon

$$(x_0-x_1)+\frac{1}{x_0-x_1}+(x_1-x_2)+\frac{1}{x_1-x_2}+\ldots+(x_{n-1}-x_n)+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geqslant 2n.$$

Mutta tämä on helppo todistaa vihjeen antaman epäyhtälön avulla. Nimittäin vasemman puolen kahden ensimmäisen termin summan on oltava vähintään 2, kahden seuraavan termin summan on oltava vähintään 2, ja niin edelleen. Koska vasemmalla puolella on n termiparia, olemme valmiita.

9. Aloitamme kertomalla yhtälö puolittain lausekkeella $\left(4x^2+y^2\right)$. Nyt aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä saadaan arvio

$$\begin{aligned}&(x+1)(y+2)(2x+y)\left(4x^2+y^2\right)\\ &\qquad \geqslant 2\sqrt{x\cdot 1}\cdot 2\sqrt{y\cdot 2}\cdot 2\sqrt{2x\cdot y}\cdot 2\sqrt{4x^2\cdot y^2} = 64x^2y^2.\end{aligned}$$

Mutta tässä voi päteä yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin kun $x = 1$, $y = 2$, $2x = y$ ja $4x^2 = y^2$. Mutta nyt nähdään helposti, että nämä yhtäsuuruudet pätevät täsmälleen silloin kun $x = 1$ ja $y = 2$, mikä antaakin yhtälön ainoan ratkaisun.

10. Noudatamme vihjeen ohjeita ja sovellamme aritmeettis-geometrista epäyhtälöä kolmeen kertaan; vasemman puolen tekijöihin $1 + 2ax = 1 + ax + ax$ ja $1 + 2by = 1 + by + by$, sekä koko oikean puolen lausekkeeseen. Näin saamme välitulokset

$$\frac{27xy}{(1+2ax)(1+2by)} \leqslant \frac{27xy}{3\sqrt[3]{a^2x^2} \cdot 3\sqrt[3]{b^2y^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{xy}{a^2b^2}},$$

sekä

$$\frac{1}{ab} + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{xy}{a^2b^2}}.$$

Nyt näissä epäyhtälöissä voi vallita yhtäsuuruudet silloin ja vain silloin kun

$$ax = by = 1, \quad \text{ja} \quad \frac{1}{ab} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

Ensimmäinen näistä pätee täsmälleen silloin kun $x = \frac{1}{a}$ ja $y = \frac{1}{b}$, kun taas jälkimmäinen näistä pätee täsmälleen silloin kun $x = \frac{1}{b}$ ja $y = \frac{1}{a}$.

Päädymme siis seuraavaan johtopäätökseen: Jos $a \neq b$, niin ratkaisuita ei ole. Jos taas $a = b$, niin ainoa ratkaisu on $x = y = \frac{1}{a}$.

11. Aloitamme kertomalla todistettavan epäyhtälön puolittain keskiarvolausekkeella $\frac{1}{3}(a^n + b^n + c^n)$, jolloin todistettava epäyhtälö saa muodon

$$\frac{a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}}{3} \geqslant \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a^n + b^n + c^n}{3}.$$

Mutta koska symmetrian nojalla voimme olettaa, että $a \geqslant b \geqslant c$, niin tästä seuraavan suuruusjärjestyksen $a^n \geqslant b^n \geqslant c^n$ nojalla todistettava epäyhtälö seuraa suoraan Tšebyšovin epäyhtälöstä.

12. Ottamalla logaritmit puolittain ja käyttämällä logaritmien perusominaisuuksia todistettava epäyhtälö voidaan kirjoittaa uudelleen muodossa

$$a \log a + b \log b + c \log c \geqslant \frac{a+b+c}{3} \log a + \frac{a+b+c}{3} \log b + \frac{a+b+c}{3} \log c.$$

Symmetrian nojalla voimme olettaa, että vaikkapa $a \geqslant b \geqslant c$, jolloin myös $\log a \geqslant \log b \geqslant \log c$. Nyt, käyttämällä Tšebyšovin epäyhtälöä vasempaan puoleen, saamme

$$\begin{aligned} a \log a + b \log b + c \log c &\geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)(\log a + \log b + \log c) \\ &= \frac{a+b+c}{3} \log a + \frac{a+b+c}{3} \log b + \frac{a+b+c}{3} \log c. \end{aligned}$$

13. Epäyhtälön vasen puoli voidaan kirjoittaa muodossa

$$a_1 \cdot \frac{1}{1^2} + a_2 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Varmasti $\frac{1}{1^2} \geqslant \frac{1}{2^2} \geqslant \ldots \frac{1}{n^2}$. Nyt, suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla vasen puoli on pienimmillään silloin kun $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, ja luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat niin pieniä kuin mahdollista. Eli siis silloin kun $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\ldots$, $a_n = n$. Voimme siis arvioida

$$a_1 \cdot \frac{1}{1^2} + a_2 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{n^2} \geqslant 1 \cdot \frac{1}{1^2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

14. Todistettavan epäyhtälön vasemman puolen voi kirjoittaa muodossa

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_2} + a_2 \cdot \frac{1}{a_3} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{a_1}.$$

Minimoidaksemme tätä lauseketta suuruusjärjestysepäyhtälön avulla, suurin luvuista $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on kerrottava pienimmällä luvuista $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, toiseksi suurin edellisistä toiseksi pienimmällä jälkimmäisistä, ja niin edelleen. Oletetaan nyt, että luvuista $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suurin on a_k. Mikä luvuista $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ on pienin? Tietysti $\frac{1}{a_k}$. Jos a_ℓ on edellisistä luvuista toiseksi suurin, niin $\frac{1}{a_\ell}$ on jälkimmäisistä luvuista toiseksi pienin, ja niin edelleen. Täten

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_2} + a_2 \cdot \frac{1}{a_3} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{a_1} \geqslant a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} = n.$$

15. Ensinnäkin,

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} = a^5 \cdot \frac{1}{b^3 c^3} + b^5 \cdot \frac{1}{c^3 a^3} + c^5 \cdot \frac{1}{a^3 b^3}.$$

Symmetrian vuoksi voimme olettaa, että $a \geqslant b \geqslant c$. Tästä oletuksesta seuraa, että

$$a^5 \geqslant b^5 \geqslant c^5, \quad \text{ja että} \quad \frac{1}{a^3 b^3} \leqslant \frac{1}{b^3 c^3} \leqslant \frac{1}{c^3 a^3}.$$

Nyt, käyttämällä suuruusjärjestysepäyhtälöä kahdesti saamme, että

$$\begin{aligned} a^5 \cdot \frac{1}{b^3 c^3} + b^5 \cdot \frac{1}{c^3 a^3} + c^5 \cdot \frac{1}{a^3 b^3} &\geqslant a^5 \cdot \frac{1}{a^3 b^3} + b^5 \cdot \frac{1}{b^3 c^3} + c^5 \cdot \frac{1}{c^3 a^3} \\ = a^2 \cdot \frac{1}{b^3} + b^2 \cdot \frac{1}{c^3} + c^2 \cdot \frac{1}{a^3} &\geqslant a^2 \cdot \frac{1}{a^3} + b^2 \cdot \frac{1}{b^3} + c^2 \cdot \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

16. Kirjoitetaan ensiksi

$$\begin{aligned} &\frac{a^2 x^2}{(by + cz)(bz + cy)} + \frac{b^2 y^2}{(cz + ax)(cx + az)} + \frac{c^2 z^2}{(ax + by)(ay + bx)} \\ &\quad = \frac{a^2 x^2}{b^2 y \cdot z + b y^2 \cdot c + c z^2 \cdot b + c^2 z \cdot y} + \frac{b^2 y^2}{c^2 z \cdot x + c z^2 \cdot a + a x^2 \cdot c + a^2 x \cdot z} \\ &\quad\quad + \frac{c^2 z^2}{a^2 x \cdot y + a x^2 \cdot b + b y^2 \cdot a + b^2 y \cdot x}. \end{aligned}$$

Katsokaamme tämän lausekkeen nimittäjiä, ja huomatkaamme, että

- Ensimmäisen termin nimittäjässä
$$b^2 y \geqslant c^2 z, \quad z \leqslant y, \quad by^2 \geqslant cz^2, \quad \text{ja} \quad c \leqslant b.$$
- Toisen termin nimittäjässä
$$a^2 x \geqslant c^2 z, \quad z \leqslant x, \quad ax^2 \geqslant cz^2, \quad \text{ja} \quad c \leqslant a.$$
- Kolmannen termin nimittäjässä
$$a^2 x \geqslant b^2 y, \quad y \leqslant x, \quad ax^2 \geqslant by^2, \quad \text{ja} \quad b \leqslant a.$$

Soveltamalla suuruusjärjestysepäyhtälöä jokaiseen nimittäjään erikseen saamme

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2x^2}{b^2y \cdot z + by^2 \cdot c + cz^2 \cdot b + c^2z \cdot y} + \frac{b^2y^2}{c^2z \cdot x + cz^2 \cdot a + ax^2 \cdot c + a^2x \cdot z} \\
&\qquad + \frac{c^2z^2}{a^2x \cdot y + ax^2 \cdot b + by^2 \cdot a + b^2y \cdot x} \\
\geqslant\ &\frac{a^2x^2}{b^2y \cdot y + by^2 \cdot b + cz^2 \cdot c + c^2z \cdot z} + \frac{b^2y^2}{c^2z \cdot z + cz^2 \cdot c + ax^2 \cdot a + a^2x \cdot x} \\
&\qquad + \frac{c^2z^2}{a^2x \cdot x + ax^2 \cdot a + by^2 \cdot b + b^2y \cdot y}.
\end{aligned}$$

Nyt teemme vihjeen ehdottaman muuttujanvaihdon. Enään tarvitsee todistaa, että
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right) \geqslant \frac{3}{4}.$$
Aloitamme tämän epäyhtälön todistuksen kertomalla molemmat puolet lausekkeella $2\big(\alpha\,(\beta+\gamma) + \beta\,(\gamma+\alpha) + \gamma\,(\alpha+\beta)\big)$. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla on oltava

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right)\big(\alpha\,(\beta+\gamma) + \beta\,(\gamma+\alpha) + \gamma\,(\alpha+\beta)\big) \\
\geqslant\ &\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}} \cdot \sqrt{\alpha\,(\beta+\gamma)} + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma+\alpha}} \cdot \sqrt{\beta\,(\gamma+\alpha)} + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha+\beta}} \cdot \sqrt{\gamma\,(\alpha+\beta)}\right)^2 \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\,.
\end{aligned}$$

Mutta todistettavan epäyhtälön oikea puoli on nyt
$$\frac{3}{4} \cdot 2\big(\alpha\,(\beta+\gamma) + \beta\,(\gamma+\alpha) + \gamma\,(\alpha+\beta)\big) = 3\,(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\,.$$

Todistus on siis valmis, kunhan on todistettu, että $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geqslant \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$. Mutta tunnemme tämän epäyhtälön jo; sen todistus löytyy harjoitustehtävän 5 malliratkaisusta.

17. Huomaamme, että $\big((a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+a)\big) = 2$, ja kertomalla todistettava epäyhtälö puolittain tällä lausekkeella se saa muodon

$$\big((a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+a)\big)\left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a}\right) \geqslant 1.$$

Käyttämällä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä tämän vasemman puolen lausekkeeseen antaa

$$\begin{aligned}
&\big((a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)\big)\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\right)\\
&\geqslant \left(\sqrt{a+b}\sqrt{\frac{a^2}{b+c}}+\sqrt{b+c}\sqrt{\frac{b^2}{b+c}}+\sqrt{c+d}\sqrt{\frac{c^2}{c+d}}+\sqrt{d+a}\sqrt{\frac{d^2}{d+a}}\right)^2\\
&=(a+b+c+d)^2=1.
\end{aligned}$$

Huomataksemme, että yhtäsuuruus pätee vain silloin kun $a=b=c=d=\frac{1}{4}$, aloitamme huomauttamalla, että yhtäsuuruuden pätiessä vektorit

$$\left\langle\sqrt{a+b},\sqrt{b+c},\sqrt{c+d},\sqrt{d+a}\right\rangle \quad \text{ja} \quad \left\langle\sqrt{\frac{a^2}{a+b}},\sqrt{\frac{b^2}{b+c}},\sqrt{\frac{c^2}{c+d}},\sqrt{\frac{d^2}{d+a}}\right\rangle$$

ovat yhdensuuntaiset. Toisin sanoen, (koska kaikki luvut ovat positiivisia) yhtäsuuruuden sattuessa löytyy luku $k>0$, jolle

$$k\sqrt{a+b}=\sqrt{\frac{a^2}{a+b}},\quad k\sqrt{b+c}=\sqrt{\frac{b^2}{b+c}},\quad k\sqrt{c+d}=\sqrt{\frac{c^2}{c+d}},$$
$$\text{sekä}\quad k\sqrt{d+a}=\sqrt{\frac{d^2}{d+a}}.$$

Näistä neljästä epäyhtälöstä vuorostaan seuraa, että $k=a$, $k=b$, $k=c$ ja $k=d$. Täten yhtäsuuruus vallitsee silloin ja vain silloin kun $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

18. Aloitamme, kuten vihje ehdottaa, kertomalla todistettavan epäyhtälön molemmat puolet lausekkeella $a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)$. Näin saadun uuden todistettavan epäyhtälön vasenta puolta voi arvioida Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöllä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\big(a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)\big)\left(\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right)\\
&\geqslant\left(\sqrt{a(b+2c)}\sqrt{\frac{a}{b+2c}}+\sqrt{b(c+2a)}\sqrt{\frac{b}{c+2a}}+\sqrt{c(a+2b)}\sqrt{\frac{c}{a+2b}}\right)^2\\
&=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca).
\end{aligned}$$

Todistettavan epäyhtälön oikea puoli sen sijaan on

$$a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)=3(ab+bc+ca).$$

Jälleen todistettava tulos on palautettu epäyhtälöön $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$, joka on todistettu harjoitustehtävän 5 yhteydessä.

19. Aloitamme kertomalla molemmat puolet lausekkeella $ac+bd$, jolloin saamme todistettavalle epäyhtälölle muodon

$$(ac+bd)\left(\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\right)\geqslant ac+bd.$$

Mutta nyt Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$(ac+bd)\left(\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\right) \geqslant \left(\sqrt{ac}\sqrt{\frac{a^3}{c}}+\sqrt{bd}\sqrt{\frac{b^3}{d}}\right)^2 = \left(a^2+b^2\right)^2.$$

Nyt riittää enään todistaa, että $\left(a^2+b^2\right)^2 \geqslant ac+bd$. Mutta tästä molemmat puolet neliöimällä saatava epäyhtälö on helppo todistaa: onhan

$$\left(a^2+b^2\right)^4 = \left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2\right)^3 = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \geqslant (ac+bd)^2,$$

missä viimeinen arvio tietenkin pätee Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla.

20. Annamme tälle ongelmalle kaksi ratkaisua.

Ratkaisu 1.(Käyttäen Hölderin epäyhtälöä.) Teemme vihjeessä ehdotetun muuttujanvaihdon, jolloin todistettava epäyhtälö saa muodon

$$(1+a_1^n)(1+a_2^n)\cdots(1+a_n^n) \geqslant (1+a_1a_2\cdots a_n)^n.$$

Ottamalla tästä puolittain n. juuret se saa muodon

$$(1^n+a_1^n)^{\frac{1}{n}}(1^n+a_2^n)^{\frac{1}{n}}\cdots(1^n+a_n^n)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1+a_1a_2\cdots a_n,$$

joka taas pitää paikkaansa suoraan Hölderin epäyhtälön nojalla.

Ratkaisu 2. (Aritmeettis-geometrista epäyhtälöä käyttäen.) Kerromme molemmat puolet auki binomikaavaa käyttäen, jolloin todistettava epäyhtälö saa muodon

$$\begin{aligned}1+(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)+\ldots+x_1x_2\cdots x_n\\ \geqslant 1+\binom{n}{1}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}+\binom{n}{2}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{2}{n}}+\ldots+\binom{n}{n}x_1x_2\cdots x_n.\end{aligned}$$

Vähennämme puolittain vakion 1, jolloin kummallekin puolelle jää jäljelle täsmälleen n termiä. Osoitamme, että vasemman puolen k. termi on aina vähintään yhtä suuri kuin oikean puolen k. termi (kun $k=1,2,\ldots,n$).

Vasemman puolen k. termi sisältää $\binom{n}{k}$ termiä, joista tekijä a_ℓ ($\ell=1,2,\ldots,n$) esiintyy täsmälleen $\binom{n-1}{k-1}$ termissä. Käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä näihin $\binom{n}{k}$ termiin saamme k. termille alarajan

$$\binom{n}{k}\left(x_1^{\binom{n-1}{k-1}}x_2^{\binom{n-1}{k-1}}\cdots x_n^{\binom{n-1}{k-1}}\right)^{\frac{1}{\binom{n}{k}}}.$$

Muistutamme, että

$$\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!},\text{ ja että }\frac{1}{\binom{n}{k}}=\frac{k!\,(n-k)!}{n!}=\frac{n}{k}\cdot\frac{(k-1)!\,(n-k)!}{(n-1)!}.$$

Näin ollen saamme kyseiselle alarajalle muodon $\binom{n}{k}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{k}{n}}$. Koska viimeksi mainittu on sama kuin oikean puolen k. termi, olemme valmiita.

21. Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä (eksponenteilla $p = \frac{2}{3}$ ja $q = \frac{1}{3}$) oikean puolen lausekkeeseen saamme

$$a^2b + b^2c + c^2a \leqslant \left(\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}} + \left(b^2\right)^{\frac{3}{2}} + \left(c^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(b^3 + c^3 + a^3\right)^{\frac{1}{3}} = a^3 + b^3 + c^3.$$

22. Soveltamalla Hölderin epäyhtälöä lukujonoihin $\langle a^p, b^p, c^p \rangle$, $\langle a^q, b^q, c^q \rangle$ sekä $\langle a^r, b^r, c^r \rangle$ näemme, että

$$\begin{aligned}
&a^p b^q c^r + c^p a^q b^r + b^p c^q a^r \\
&\leqslant \left((a^p)^{\frac{1}{p}} + (c^p)^{\frac{1}{p}} + (b^p)^{\frac{1}{p}}\right)^p \left((b^q)^{\frac{1}{q}} + (a^q)^{\frac{1}{q}} + (c^q)^{\frac{1}{q}}\right)^q \left((c^r)^{\frac{1}{r}} + (b^r)^{\frac{1}{r}} + (a^r)^{\frac{1}{r}}\right)^r \\
&\qquad = (a + b + c)^{p+q+r} = a + b + c.
\end{aligned}$$

23. Aloitamme ottamalle kuutiojuuret puolittain, ja sitten kirjoittamalla lausekkeet x_ℓ ja $\frac{1}{x_\ell}$ muodoissa $\left(x_\ell^{\frac{1}{3}}\right)^3$ ja $\left(\left(\frac{1}{x_\ell}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, jolloin todistettava epäyhtälö saa muodon

$$2^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \left(x_\ell^{\frac{1}{3}}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{x_\ell}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \geqslant n.$$

Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä vasempaan puoleen, sekä ehtoja $x_\ell \in [1, 2]$ ($\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$) näemme, että

$$\begin{aligned}
2^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \left(x_\ell^{\frac{1}{3}}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{x_\ell}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} &\geqslant 2^{\frac{1}{3}} \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{x_\ell}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= 2^{\frac{1}{3}} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{x_\ell^{\frac{1}{3}}} \geqslant 2^{\frac{1}{3}} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = n.
\end{aligned}$$

24. Asetamme

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}}, & a_2 &= \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}}, & a_3 &= \frac{z\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}, \\
b_1 &= \frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}}, & b_2 &= \frac{z\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}}, & b_3 &= \frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}, \quad \text{sekä} \\
c_1 &= \frac{z\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}}, & c_2 &= \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}}, & c_3 &= \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}},
\end{aligned}$$

ja käytämme sitten Minkowskin epäyhtälöä näihin kolmeen lukujonoon. Näin saamme, että

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{ay^2 + bz^2 + cx^2}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{az^2 + bx^2 + cy^2}{a+b+c}} \\
&\geqslant \sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)^2 + (a_2 + b_2 + c_2)^2 + (a_3 + b_3 + c_3)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{a} + y\sqrt{a} + z\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{b} + z\sqrt{b} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}}\right)^2 + \left(\frac{z\sqrt{c} + x\sqrt{c} + y\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}\right)^2},
\end{aligned}$$

missä viimeinen lauseke pienen sieventämisen jälkeen sievenee muotoon $x+y+z$.

25. Aloitamme muokkaamalla epäyhtälöä hieman, jolloin saamme yhtäpitävän epäyhtälön

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}}\cdot\sqrt{a+b+c+d}\right)^2 \geqslant 64.$$

Käytämme Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä vasempaan puoleen ja näemme, että

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}}\cdot\sqrt{a+b+c+d}\right)^2\\ &\qquad\geqslant\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{d}}\cdot\sqrt{d}\right)^2=8^2=64.\end{aligned}$$

26. Osoitamme, että vasemman puolen epäyhtälö pätee. Funktio $f(x)=\frac{1}{x}$ on aidosti konveksi kun $x>0$ (onhan $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$ kun $x>0$). Jakamalla todistettavan epäyhtälön molemmat puolet luvulla 6 se saa muodon

$$\frac{1{,}5}{a+b+c}\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a+b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{b+c}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{c+a}.$$

Käyttämällä Jensenin epäyhtälöä (yllä mainitulla funktiolla) oikean puoleiseen lausekkeeseen antaa

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a+b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{b+c}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{c+a}&\geqslant\frac{1}{\frac{1}{3}(a+b)+\frac{1}{3}(b+c)+\frac{1}{3}(c+a)}\\ &=\frac{3}{2a+2b+2c}=\frac{1{,}5}{a+b+c}.\end{aligned}$$

Osoittaaksemme oikean puoleisen epäyhtälön aloitamme kirjoittamalla sen oikean puoleisen lausekkeen uudelleen ja käyttämällä sitten jälleen Jensenin epäyhtälöä; tällä kertaa jokaiseen sulkeilla merkittyyn summaan (käyttämällä samaa funktiota kuin aiemminkin). Näin saamme

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}&=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\right)\\ &\geqslant\frac{1}{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b}+\frac{1}{\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c}+\frac{1}{\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a}=2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).\end{aligned}$$

27. Aloitamme muokkaamalla todistettavan epäyhtälön vasenta puolta seuraavasti:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}&=\frac{x+1-1}{x+1}+\frac{y+1-1}{y+1}+\frac{z+1-1}{z+1}\\ &=3-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}-\frac{1}{z+1}.\end{aligned}$$

Tehtävämme on siis todistaa epäyhtälö

$$3-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}-\frac{1}{z+1}\leqslant\frac{3}{4},$$

joka pienen sieventämisen jälkeen saa muodon

$$\frac{3}{4} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right).$$

Huomautamme jälleen, että funktio $f(x)=\frac{1}{x}$ on aidosti konveksi puolisuoralla $x>0$. Soveltamalla Jensenin epäyhtälöä viimeisen epäyhtälön oikeaan puoleen antaa

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right) &\geqslant \frac{1}{\frac{1}{3}(x+1)+\frac{1}{3}(y+1)+\frac{1}{3}(z+1)} \\ &= \frac{3}{3+x+y+z}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

28. Asetamme $f(x)=\frac{1}{4x-x^3}$. Jos katsomme tarkemmin toista derivaattaa $f''(x)$, huomaamme että $f''(x)>0$ kun $0<x<2$, eli funktio $f(x)$ on aidosti konveksi kyseisellä välillä. Voimme siis käyttää Jensenin epäyhtälöä, jolloin saamme

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{4a_\ell-a_\ell^3} = n\cdot\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4a_\ell-a_\ell^3} &\geqslant \frac{n}{4\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell\right)-\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell\right)^3} \\ &= \frac{n}{4\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)-\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)^3}=\frac{n}{3}.\end{aligned}$$

29. Vihjeen väite seuraa suoraan sinilauseesta. Funktio $f(x)=\sin x$ on aidosti ylöspäin konveksi välillä $x\in\,]0,\pi[$, minkä näkee helposti siitä, että $f''(x)=-\sin x<0$ kyseisellä välillä. Jensenin epäyhtälön nojalla siis

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqslant 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=3\sin\frac{\pi}{3},$$

mikä onkin täsmälleen puolet tasasivuisen kolmion piiristä. Lisäksi tässä voi päteä yhtäsuuruus vain kun $\alpha=\beta=\gamma$, eli juuri tasasivuisen kolmion tapauksessa.

30. Teemme ehdotetun muuttujainvaihdon saadaksemme epäyhtälön

$$\sqrt{\frac{e^a}{e^a+8}}+\sqrt{\frac{e^b}{e^b+8}}+\sqrt{\frac{e^c}{e^c+8}} \geqslant 1.$$

Ehdot $x,y,z\in\,]0,4[$ ja $xyz=1$ saavat muodot $e^a,e^b,e^c\in\,]0,4[$ ja $a+b+c=0$. Tarkastelemme funktiota $f(s)=\sqrt{\frac{e^s}{e^s+8}}$. Pienen ahkeroinnin jälkeen näemme, että

$$f'(s)=\frac{4e^{\frac{s}{2}}}{(e^s+8)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{ja että} \quad f''(s)=\frac{2e^{\frac{s}{2}}(8-2e^s)}{(e^s+8)^{\frac{5}{2}}}.$$

Näemme siis, että $f''(s)>0$ kun $e^s<4$. Täten $f(s)$ on aidosti konveksi kun $e^s<4$, ja voimme käyttää Jensenin epäyhtälöä nähdäksemme, että

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{e^a}{e^a+8}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{e^b}{e^b+8}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{e^c}{e^c+8}} \geqslant \sqrt{\frac{e^{\frac{a+b+c}{3}}}{e^{\frac{a+b+c}{3}}+8}}=\sqrt{\frac{1}{1+8}}=\frac{1}{3},$$

ja olemme valmiita.

31. Vihjettä seuraten käytämme potenssikeskiarvojen epäyhtälöä, jolla näemme, että

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leqslant \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}},$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x^2+y^2 \leqslant \left(x^3+y^3\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$. Soveltamalla ehtoa $x^3+y^3>2$ tämän epäyhtälön oikeaan puoleen antaa arvion

$$\left(x^3+y^3\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} < \left(x^3+y^3\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{3}} = x^3+y^3.$$

Täten $x^2+y^2<x^3+y^3$. Toisaalta, varmasti myös $(1-y)^2 \geqslant 0$, mistä seuraa, että $y^2-2y^3+y^4 \geqslant 0$. Laskemalla tämä yhteen epäyhtälön $x^2+y^2<x^3+y^3$ kanssa antaa halutun tuloksen.

32. Aloitamme todistamalla, että epäyhtälö

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \geqslant a+b+c+d$$

pätee. Potenssikeskiarvojen epäyhtälön nojalla

$$\frac{a+b+c+d}{d} \leqslant \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}},$$

eli haluttu johtopäätös seuraisi epäyhtälöstä

$$\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}}.$$

Jos $\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4} \geqslant 1$, niin tämä selvästi pätee, ja näin on sillä aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4} \geqslant \sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3} = 1.$$

Seuraavaksi todistamme jälkimmäisen epäyhtälön

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Mutta tämä seuraa käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä neljä kertaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3+d^3 &= \frac{a^3+b^3+c^3}{3}+\frac{a^3+b^3+d^3}{3}+\frac{a^3+c^3+d^3}{3}+\frac{b^3+c^3+d^3}{3} \\ &\geqslant \sqrt[3]{a^3b^3c^3}+\sqrt[3]{a^3b^3d^3}+\sqrt[3]{a^3c^3d^3}+\sqrt[3]{b^3c^3d^3} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}. \end{aligned}$$

33. Aloitamme todistamalla vihjeen epäyhtälön. Potenssikeskiarvojen epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} &\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \\ &\qquad \leqslant \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} \cdot \left(\frac{\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}+\left(b^2\right)^{\frac{3}{2}}+\left(c^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3}. \end{aligned}$$

Nyt siirrymme varsinaiseen todistettavaan epäyhtälöön. Käyttämällä vihjeen epäyhtälöä vasempaan puoleen antaa

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{a^3+b^3+d^3}{a+b+d}+\frac{a^3+c^3+d^3}{a+c+d}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}\\
&\quad\geqslant \frac{\frac{1}{3}(a+b+c)\big(a^2+b^2+c^2\big)}{a+b+c}+\frac{\frac{1}{3}(a+b+d)\big(a^2+b^2+d^2\big)}{a+b+d}\\
&\qquad+\frac{\frac{1}{3}(a+c+d)\big(a^2+c^2+d^2\big)}{a+c+d}+\frac{\frac{1}{3}(b+c+d)\big(b^2+c^2+d^2\big)}{b+c+d}\\
&\quad=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+\frac{a^2+b^2+d^2}{3}+\frac{a^2+c^2+d^2}{3}+\frac{b^2+c^2+d^2}{3}\\
&\quad=a^2+b^2+c^2+d^2.
\end{aligned}$$

34. Noudatamme vihjeen ohjetta ja homogenisoimme todistettavan epäyhtälön kertomalla vasemman puolen termin $2\sqrt{3xyz}$ lausekkeella $\sqrt{x+y+z}$, ja kertomalla oikean puolen lausekkeella $(x+y+z)^2$. Kertomalla oikea puoli auki ja sieventämällä todistettavaksi jää, että

$$\sqrt{3xyz}\cdot\sqrt{x+y+z}\leqslant xy+yz+zx.$$

Neliöimällä molemmat puolet ja sieventämällä jäljelle jää epäyhtälö

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2\leqslant x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2.$$

Tämän osoittamiseksi teemme muuttujanvaihdot $xy=a$, $yz=b$ ja $zx=c$, jolloin jäljelle jää epäyhtälö $ac+ab+bc\leqslant a^2+b^2+c^2$, joka on jo todistettu tehtävän viisi yhteydessä.

35. Aloitamme kertomalla vasemman puolen summalla $p+q+r$, ja kertomalla oikean puolen termin 2 lausekkeella $(p+q+r)^3$. Kertomalla nyt kaikki auki saamme naurettavan monta termiä. Onneksi kuitenkin suurin osa termeistä sievenee pois, ja jäljelle jää vain epäyhtälö

$$p^2q+pq^2+p^2r+pr^2+q^2r+qr^2\leqslant 2\left(p^3+q^3+r^3\right).$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön avulla oikeaa puolta voi arvioida alas päin seuraavasti:

$$\begin{aligned}
2\left(p^3+q^3+r^3\right)&=p^3+q^3+r^3+\left(p^3+q^3+r^3\right)\\
&\geqslant p^3+q^3+r^3+3\sqrt[3]{p^3q^3r^3}=p^3+q^3+r^3+3pqr.
\end{aligned}$$

Riittää siis todistaa, että

$$p^2q+pq^2+p^2r+pr^2+q^2r+qr^2\leqslant p^3+q^3+r^3+3pqr.$$

Mutta tässä ei ole paljoa todistettavaa sillä tämä on vain Schurin epäyhtälö parametrin r arvolla 1.

36. Merkitään

$$S_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad S_2 = \frac{a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n}{\frac{n(n-1)}{2}},$$
$$\ldots, \quad S_n = a_1a_2 \cdots a_n.$$

Näillä merkinnöillä

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) = 1 + \binom{n}{1} S_1 + \binom{n}{2} S_2 + \ldots + \binom{n}{n} S_n.$$

Aloitamme osoittamalla, että

$$1 + \binom{n}{1} S_1 + \binom{n}{2} S_2 + \ldots + \binom{n}{n} S_n \geqslant \left(1 + \sqrt[n]{S_n}\right)^n.$$

Laventamalla tässä oikea puoli binomikaavalla, pääsemme supistamaan pois termit 1 ja $\binom{n}{n} S_n$ puolittain, jolloin jäljelle jää

$$\binom{n}{1} S_1 + \binom{n}{2} S_2 + \ldots + \binom{n}{n-1} S_{n-1} \geqslant \binom{n}{1} S_n^{\frac{1}{n}} + \binom{n}{2} S_n^{\frac{2}{n}} + \ldots + \binom{n}{n-1} S_n^{\frac{n-1}{n}}.$$

Tämä epäyhtälö pitää paikkaansa, sillä jokaisella $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ vasemman puolen k. termi on vähintään yhtä suuri kuin oikean puolen k. termi; onhan MacLaurinin epäyhtälön nojalla $S_k^{\frac{1}{k}} \geqslant S_n^{\frac{1}{n}}$, ja siis myös

$$\binom{n}{k} S_k \geqslant \binom{n}{k} S_n^{\frac{k}{n}}.$$

Olemme todistaneet, että

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geqslant (1 + \sqrt[n]{a_1a_2 \cdots a_n})^n,$$

eli

$$2^n \geqslant (1 + \sqrt[n]{a_1a_2 \cdots a_n})^n.$$

Ottamalla tästä puolittain n. juuret, vähentämällä puolittain luku yksi, ja korottamalla sitten puolittain potenssiin n saamme vaaditun johtopäätöksen $a_1a_2 \cdots a_n \leqslant 1$.

Tehtävän voisi myös ratkaista, kenties helpommin, käyttämällä Hölderin epäyhtälöä samaan tapaan kuin tehtävässä 20.

37. Teemme ehdotetut muuttujainvaihdot $a = x^3$, $b = y^3$ ja $c = z^3$. Laventamalla ja kertomalla puolittain tulolla $x^3y^3z^3$ jättää jäljelle vain epäyhtälön

$$\sum_{\text{sym}} x^6y^3z^0 \geqslant \sum_{\text{sym}} x^5y^2z^2,$$

joka seuraa suoraan Muirheadin epäyhtälöstä.

38. Aloitamme kertomalla molemmat puolet tulolla

$$4\,(x+y)(x+z)(y+z)(x+y+z)\,.$$

Sitten kerromme kaiken auki ja sievennämme. Lopulta todistettavaksi jää vain epäyhtälö

$$6xyz \leqslant x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y,$$

jonka voi kirjoittaa myös muodossa

$$\sum_{\text{sym}} xyz \leqslant \sum_{\text{sym}} x^2yz^0,$$

mikä seuraa välittömästi Muirheadin epäyhtälöstä.

39. Teemme ehdotetut sijoitukset ja sievennämme:

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta} + \cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha} - \sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}\\
&= \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sqrt{\sin^2\beta} + \cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha} - \sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\\
&= \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha - \sin\alpha\sin\beta\\
&= \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\alpha+\beta)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos(\alpha+\beta) + \cos\frac{\pi}{4}\sin(\alpha+\beta)\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha+\beta\right) \leqslant \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Yhtäsuuruus saavutetaan silloin kun $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$. Täten kysytty suurin mahdollinen arvo on $\sqrt{2}$.

40. Teemme ehdotetut sijoitukset. Ongelman helppo puoli on sieventää saadut lausekkeet. Käyttämällä yleisesti tunnettuja trigonometrisiä identiteettejä todistettavaksi jää epäyhtälö

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leqslant \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Ehto $xy + yz + zx = 1$ saa muodon

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1.$$

Kertomalla tässä puolittain tulolla $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ ja sieventämällä saadaan yhtälö $\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0$. Ratkaisemalla tämän yhtälön näemme, että ehto $xy + yz + zx = 1$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

Pitämällä mielessä että $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ muokkaamme todistettavan epäyhtälön vasenta puolta käyttämällä trigonometrisiä identiteettejä. Saamme, että

$$\begin{aligned}
&\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin 2\gamma\\
&= 2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta) + 2\sin\gamma\cos\gamma = 2\sin\gamma\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma\big)\\
&= 2\sin\gamma\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)\\
&= 2\sin\gamma\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\
&= 32\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Sitten muokkaamme oikeaa puolta samaan tapaan:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\alpha+\beta)$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$
$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Todistettava epäyhtälö siis voidaan kirjoittaa muodossa

$$32\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

tai edelleen muodossa

$$8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant 1.$$

Palautamme mieleen, että $\alpha, \beta, \gamma \in \left]0, \pi\right[$. Funktio $f(x) = \sin x$ on ylöspäin konveksi kyseisellä välillä, koska $f''(x) = -\sin x$. Käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä ja Jensenin epäyhtälöä saamme viimein

$$8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant 8\left(\frac{1}{3}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^3$$
$$\leqslant 8\sin^3\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\gamma}{2}\right) = 8\sin^3\frac{\pi}{6} = 1.$$

Lisää harjoitustehtäviä

41. Osoita kaikille $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ ja jokaiselle $n \in \mathbb{Z}_+$ epäyhtälö

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

42. Olkoot x_1, x_2, $\ldots$, x_n positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n} \geqslant (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}.$$

43. Todista, että kaikilla reaaliluvuilla x ja y pätee

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

44. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset, 1995) Olkoot a, b ja c sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $abc = 1$. Todista, että

$$\frac{1}{a^3\,(b+c)} + \frac{1}{b^3\,(a+c)} + \frac{1}{c^3\,(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

45. (Moldovan matematiikkaolympiadi, 1996) Olkoot a, b ja c sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Osoita, että $(a-c)(b-c) \leqslant 0$.

46. (Irlanti, 2000) Olkoot x ja y ei-negatiivisia reaalilukuja, joille $x + y = 2$. Osoita, että

$$x^2 y^2 \left(x^2 + y^2\right) \leqslant 2.$$

47. (Thaimaa, 1991) Olkoot a, b, c ja d sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $ab + bc + cd + da = 1$. Osoita, että

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}.$$

48. (Kreikka, 1987) Olkoot a, b ja c mielivaltaisia reaalilukuja. Todista, että jokaiselle $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{n-1}.$$

49. (Valko-Venäjä, 1993) Olkoot x_1, x_2, $\ldots$, x_n $(n \geqslant 2)$ ei-negatiivisia reaalilukuja joiden summa on yksi. Todista epäyhtälö

$$\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{x_\ell \left(1 - x_\ell\right)} \leqslant \sqrt{n-1}.$$

50. (Unkari, 1985) Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

51. (Leningrad, 1981) Olkoot a, b ja c reaalilukuja väliltä $[0,1]$. Osoita, että

$$\sqrt{a\,(1-b)(1-c)} + \sqrt{b\,(1-a)(1-c)} + \sqrt{c\,(1-a)(1-b)} \leqslant 1 + \sqrt{abc}.$$

52. (Romania, 2004) Etsi kaikki positiiviset reaaliluvut a, b ja c joille pätee

$$4\,(ab+bc+ca) - 1 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\left(a^3 + b^3 + c^3\right).$$

53. (Romania, 2004) Olkoot a, b ja c sellaisia reaalilukuja, että $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Todista, että

$$|a| + |b| + |c| - abc \leqslant 4.$$

54. (Viro, 2004) Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja joille $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Osoita, että

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geqslant 1.$$

55. (Itävalta, 2004) Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja. Osoita, että

$$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 - 6abcd \geqslant -2.$$

56. (Irlanti, 2004) Olkoot a ja b ei-negatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{a\,(a+b)^3} + b\sqrt{a^2+b^2}\right) \leqslant 3\left(a^2+b^2\right),$$

ja että tässä pätee yhtäsuuruus jos ja vain jos $a = b$.

57. (Uusi-Seelanti, 2004) Olkoot x_1, x_2, y_1 ja y_2 positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} \geqslant \frac{\left(x_1 + x_2\right)^2}{y_1 + y_2}.$$

58. Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Todista epäyhtälö

$$\sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2} + \sqrt{c^2 + (1-a)^2} \geqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

59. Olkoot a, b ja c sellaisia positiivisia reaalilukuja että $abc = 1$. Osoita, että

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

60. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geqslant\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

61. (Balkanin juniorimatematiikkaolympiadi, 2002) Olkoot a, b ja c sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $abc=2$. Todista, että

$$a^3+b^3+c^3\geqslant a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}.$$

62. Olkoot a, b ja c sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $abc\leqslant 1$. Osoita, että

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant a+b+c.$$

63. (Balkanin juniorimatematiikkaolympiadi, 2002) Olkoot a b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geqslant\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

64. Olkoot x, y ja z sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Osoita, että

$$x+y+z\leqslant\frac{3}{2}.$$

65. (Balkanin juniorimatematiikkaolympiadi, 2003) Olkoot x, y ja z lukua -1 suurempia reaalilukuja. Todista epäyhtälö

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geqslant 2.$$

66. Olkoot a, b ja c sellaisia positiivisia reaalilukuja, että niiden summa on yksi. Osoita, että

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\geqslant 2.$$

67. (Kansainväliset matematiikkaolympialaiset, 1987) Olkoot x, y ja z sellaisia reaalilukuja, että $x^2+y^2+z^2=2$. Osoita, että

$$x+y+z\leqslant xyz+2.$$

68. Olkoot x, y, z ja α sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $xyz=1$ ja $\alpha\geqslant 1$. Osoita, että

$$\frac{x^\alpha}{y+z}+\frac{y^\alpha}{z+x}+\frac{z^\alpha}{x+y}\geqslant\frac{3}{2}.$$

69. Olkoot a, b, c ja d positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$(a+b)^3(b+c)^3(c+d)^3(d+a)^3\geqslant 16a^2b^2c^2d^2(a+b+c+d)^4.$$

70. Olkoot a, b ja c sellaisia positiivisia reaalilukuja, että niiden summa on yksi. Todista epäyhtälö

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\geqslant 8\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2.$$

Vielä yksi epäyhtälö

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö voidaan helposti yleistää matriiseille, joiden elementit ovat ei-negatiivisia.

Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matriisi, jonka elementit ovat ei-negatiivisia reaalilukuja. Olkoot G_1, G_2, $\dots$, G_m matriisin A rivien geometriset keskiarvot, ja olkoot $A_1, A_2, \dots, A_n$ matriisin A sarakkeiden aritmeettiset keskiarvot. Oletetaan, että luvut A_1, A_2, $\dots$, A_n ovat kaikki positiviisia.

Tarkastellaan jotakin matriisin A riviä, sanokaamme ensimmäistä. Jakamalla luvut $a_{1\ell}$ $(\ell \in \{1, 2, \dots, n\})$ luvulla A_ℓ saamme n lukua

$$\frac{a_{11}}{A_1}, \frac{a_{12}}{A_2}, \dots, \frac{a_{1n}}{A_n}.$$

Soveltamalla aritmeettis-geometrista epäyhtälöä näihin lukuihin, saamme epäyhtälön

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_{1\ell}}{A_\ell} \geqslant \sqrt[n]{\frac{a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}}{A_1A_2\cdots A_n}} = \frac{G_1}{G(A_1, A_2, \dots, A_n)},$$

missä $G(A_1, A_2, \dots, A_n)$ merkitsee lukujen A_1, A_2, $\dots$, A_n geometrista keskiarvoa.

Toistamalla tätä argumenttia matriisin A muihin riveihin, saamme yhteensä m epäyhtälöä, jotka laskemalla puolittain yhteen saamme johtopäätöksen

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_{k\ell}}{A_\ell} \geqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{G_k}{G(A_1, A_2, \dots, A_n)}.$$

Vasemman puolen termien uudelleenjärjestämisen jälkeen saamme, että

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\sum_{k=1}^{m} a_{k\ell}}{A_\ell} \geqslant \frac{\sum_{k=1}^{m} G_k}{G(A_1, A_2, \dots, A_n)},$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m \geqslant \frac{\sum_{k=1}^{m} G_k}{G(A_1, A_2, \dots, A_n)}, \quad \text{eli} \quad 1 \geqslant \frac{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} G_k}{G(A_1, A_2, \dots, A_n)}.$$

Merkitsemällä lukujen G_1, G_2, ..., G_m aritmeettista keskiarvoa lyhyesti lausekkeella $A(G_1, G_2, \ldots, G_m)$, viimeisin epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$G(A_1, A_2, \ldots, A_n) \geqslant A(G_1, G_2, \ldots, G_m).$$

On selvää, että tämä johtopäätös pätee myös silloin kun jokin luvuista A_ℓ häviää. Olemme täten todistaneet seuraavan aritmeettis-geometrisen epäyhtälön voimakkaan yleistyksen:

Lause 4. Olkoon A on matriisi, jossa on m riviä, n saraketta, ja jonka kaikki elementit ovat ei-negatiivisia. Olkoot G_1, G_2, ..., G_m matriisin A rivien geometriset keskiarvot, ja olkoot A_1, A_2, ..., A_n matriisin A sarakkeiden aritmeettiset keskiarvot. Olkoon lisäksi $G(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ lukujen A_1, A_2, ..., A_n geometrinen keskiarvo, ja olkoon $A(G_1, G_2, \ldots, G_m)$ lukujen G_1, G_2 ..., G_m aritmeettinen keskiarvo. Tällöin

$$G(A_1, A_2, \ldots, A_n) \geqslant A(G_1, G_2, \ldots, G_m).$$

Annamme joitakin tämän lauseen sovellutuksia.

1). Soveltamalla lausetta matriisiin

$$A = \begin{bmatrix} a_1^2 & b_1^2 \\ a_2^2 & b_2^2 \\ \cdots & \cdots \\ a_m^2 & b_m^2 \end{bmatrix}$$

ja käyttämällä kolmioepäyhtälöä $\sum_{\ell=1}^m |x_\ell| \geqslant |\sum_{\ell=1}^m x_\ell|$, saamme, että

$$\sqrt{\sum_{\ell=1}^m a_\ell^2 \cdot \sum_{\ell=1}^m b_\ell^2} \geqslant \sum_{\ell=1}^m |a_\ell b_\ell| \geqslant \left| \sum_{\ell=1}^m a_\ell b_\ell \right|,$$

mikä on Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö.

2). Olkoot c_1, c_2, ..., c_m positiivisia rationaalilukuja, joiden summa on yksi. Merkitköön M lukujen c_1, c_2, ..., c_m pienintä yhteistä nimittäjää, ja olkoot $c_\ell = \frac{d_\ell}{M}$ jokaisella $\ell \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Tällöin tietysti $\sum_{\ell=1}^m d_\ell = M$.

Oletetaan, että meillä on m positiivisista reaaliluvuista muodostuvaa tuplaa $\langle a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \rangle$, $\langle a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \rangle$, ..., ja $\langle a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \rangle$. Tarkastellaan matriisia A, jossa on n riviä ja $d_1 + d_2 + \ldots + d_m$ saraketta siten, että jokainen ensimmäisistä d_1 sarakkeesta on $\langle a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \rangle$, jokainen seuraavista d_2 sarakkeesta on $\langle a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \rangle$, ja niin edelleen.

Soveltamalla lausetta 4 matriisiin A saamme (yleistetyn) Hölderin epäyhtälön

$$\left(\sum_{\ell=1}^n a_{1\ell} \right)^{c_1} \left(\sum_{\ell=1}^n a_{2\ell} \right)^{c_2} \cdots \left(\sum_{\ell=1}^n a_{m\ell} \right)^{c_m} \geqslant \sum_{\ell=1}^n a_{1\ell}^{c_1} a_{2\ell}^{c_2} \cdots a_{m\ell}^{c_m}.$$

3). Oletetaan seuraavaksi, että n, k ja m ovat positiivisia kokonaislukuja, joille $k \leqslant m$, ja olkoot a_1, a_2, $\ldots$, a_n ei-negatiivisia reaalilukuja. Tarkastellaan matriisia A, jossa on seuraavat n riviä ja m saraketta:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^m & a_1^m & \ldots & a_1^m & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2^m & a_2^m & \ldots & a_2^m & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^m & a_n^m & \ldots & a_n^m & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

missä ensimmäiset k saraketta ovat keskenään identtisiä ja jäljelle jäävät $m-k$ saraketta koostuvat pelkästään luvuista yksi.

Lause 4 tähän matriisiin sovellettuna antaa potenssikeskiarvojen epäyhtälön

$$\left(\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n}\right)^k \geqslant \left(\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}\right)^m .$$

4). Monet annetuista harjoitustehtävistä seuraavat suoraan lauseesta 4 sopivalla matriisin A valinnalla. Esimerkiksi, lause 4 ratkaisee ongelman 20 valittaessa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}.$$