Trigonometriaa: kolmioita ja kaavoja

Trigonometriset funktiot voidaan määritellä eri tavoin. Yksikköympyrään $x^2 + y^2 = 1$ perustuva määritelmä on yleensä selkeä. Jos $A = (1, 0)$ ja $t \geq 0$ on reaaliluku, on olemassa yksikäsitteinen yksikköympyrän piste $P = (x, y)$ niin, että matka pitkin ympyrän kehää pisteestä A vastapäivään on t. Sovitaan, että $x = \cos t$ ja $y = \sin t$. Jos $x \neq 0$, sovitaan, että $\dfrac{y}{x} = \tan t$ ja jos $y \neq 0$, niin sovitaan, että $\dfrac{x}{y} = \cot t$. Jos $t < 0$, määritellään samat asiat niin, että matka A:sta P:hen kuljetaan myötäpäivään. Valtaosa trigonometristen funktioiden perusominaisuuksista saadaan tarkastelemalla yksikköympyrää. Etenkin funktioiden positiivisuus, kasvavuus ja jaksollisuus nähdään yksikköympyrästä. Erityisesti esimerkiksi sentapaiset relaatiot kuin

$$\sin 0 = \sin\pi = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 0 = 1,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t, \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t, \quad \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t, \quad \sin(-t) = -\sin t,$$
$$\cos(-t) = \cos t, \quad \sin(\pi - t) = \sin t, \quad \cos(\pi - t) = -\cos t, \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$
$$\sin(t + n \cdot (2\pi)) = \sin t, \quad \cos(t + n \cdot (2\pi)) = \cos t,$$

($n \in \mathbb{Z}$) jne. näkyvät välittömästi.

Kun otetaan huomioon kulman suuruuden määrittely radiaaneina ja kolmioiden yhdenmuotoisuus, saadaan suorakulmaisen kolmion kulmien trigonometrisille funktioille vakiintuneet määritelmät. Joskus muistikulmiksi kutsuttujen kulmien trigonometristen funktioiden arvot, sellaiset kuin esimerkiksi $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ tai $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$, nähdään välittömästi Pythagoraan lauseen avulla tasakylkisestä suorakulmaisesta kolmiosta ja tasasivuisesta kolmiosta. Ne on tosiaan hyvä muistaa!

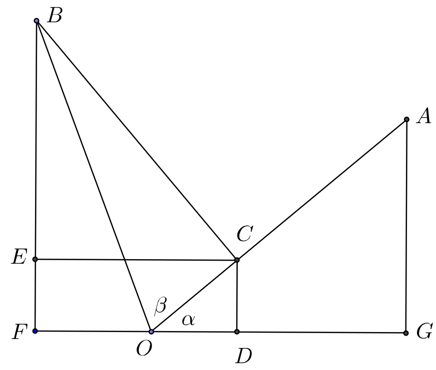
Ellei muuta sanota, tarkasteltava kolmio on ABC ja $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$, $\angle CAB = \alpha$, R ympäri piirretyn ympyrän säde, r sisään piirretyn ympyrän säde. Kolmion ala on $T = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ ja kolmion piiri on $2p = a + b + c$. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O ja sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I.

1. *Osoita, että* $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (*sinilause*).

Ratkaisu. Oletetaan, että kulma CAB on terävä. Suora CO leikkaa ABC:n ympäri piirretyn ympyrän myös pisteessä A'. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle CA'B = \angle CAB = \alpha$. Kolmio $A'BC$ on suora, koska $A'C$ on ympyrän halkaisija. Siis $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$. Jos $\angle CAB$ on tylppä, niin $ABA'C$ on jännenelikulmio, $\angle CA'B = 180^\circ - \alpha$ ja $\sin\angle CA'B = \sin\alpha$. Koska kolmio $A'CB$ on suorakulmainen, $\sin\angle CA'B = \dfrac{a}{2R}$.

2. *Osoita, että* $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ *ja* $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Ratkaisu. Olkoon ensin $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$. Olkoon $\angle AOG = \alpha$, $\angle BOA = \beta$, $OA = OB = 1$, $CD \perp OG$, $BF \perp OG$, $CE \perp BF$ ja $BC \perp OA$. Silloin $BF = \sin(\alpha + \beta)$, $OF = \cos(\alpha + \beta)$, $\angle CBF = \alpha$. Nyt $BC = \sin\beta$, $BE = BC\cos\alpha = \cos\alpha\sin\beta$, $OC = \cos\beta$, $EF = CD = OC\sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta$. $\sin(\alpha+\beta) = BF = EF+BE = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$; vastaavalla tavalla johdetaan jälkimmäinen kaava laskemalla $EC = \sin\alpha\sin\beta$ ja $OD = \cos\alpha\cos\beta$. Sinin ja kosinin määritelmä yksikköympyrän avulla johtaa relaatioihin $\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ ja $\cos\alpha = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$. Näitä toistuvasti käyttäen saadaan yhteenlaskukaavat todistetuiksi kaikille $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$.



3. *Osoita, että* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ *(kosinilause).*

Ratkaisu. A:sta piirretty korkeusjana muodostaa kaksi suorakulmaista kolmiota; niiden suoralla BC olevien kateettien pituudet ovat $b\cos\gamma$ ja $c\cos\beta$. Riippumatta siitä, onko jompikumpi kulmista β, γ tylppä vai ei, on $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$. Sinilauseen perusteella $b\sin\gamma - c\sin\beta = 0$. Siis $a^2 = a^2 + 0^2 = (b\cos\gamma + c\cos\beta)^2 + (b\sin\gamma - c\sin\beta)^2 = b^2 + c^2 + 2bc(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma) = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\beta + \gamma)$. Mutta $\cos(\beta + \gamma) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, ja väite seuraa.

4. *Osoita, että* $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Ratkaisu. Olkoon $ABCDE$ säännöllinen viisikulmio ja $AB = 1$. Leikatkoot AD ja BE pisteessä F. Olkoon $EF = x$. Ympyrän viidennestä vastaavina kehäkulmina kulmat EAD, BEA, BAC ja CAD ovat kaikki $= \frac{\pi}{5}$. Kolmio FEA on siis tasakylkinen. Mutta kulmat BAD ja AFB ovat molemmat $= \frac{2\pi}{5}$ (toinen kulmien BAC ja CAD summana, toinen kolmion FEA kulman vieruskulmana). Siis kolmio BFA on tasakylkinen, joten $BF = 1$. Yhdenmuotoisista kolmioista ABE ja FEA saadaan nyt $x : 1 = 1 : (1 + x)$. Tästä ratkaistaan $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Kolmiosta FEA saadaan kosinilauseen perusteella $x^2 = 1 + x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{5}$. Siis $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

5. *Osoita, että* $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. *(Heronin kaava).* (Perimätiedon mukaan kaavaa ei saisi käyttää ylioppilaskirjoitusten matematiikan kokeessa, ellei todista sitä oikeaksi.)

Ratkaisu. Koska $p-a = \frac{b+c-a}{2}$ jne., voidaan käyttää toistuvasti kaavaa $(x+y)(x-y) =$

$x^2 - y^2$ ja kosinilausetta. Saadaan

$$\begin{aligned} &16p(p-a)(p-b)(p-c) = (b+c+a)(b+c-a)(a+(b-c))(a-(b-c)) \\ &= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) = (2bc + (b^2+c^2-a^2))(2bc - (b^2+c^2-a^2)) \\ &= 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 = 4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2 = 4b^2c^2\sin^2\alpha = 16T^2, \end{aligned}$$

eli väite.

6. *Osoita: kaikista kolmioista, joilla on sama piiri, tasasivuisella kolmiolla on suurin pinta-ala.*

Ratkaisu. Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella $T^{2/3} = p^{1/3}((p-a)(p-b)(b-c))^{1/3} \le p^{1/3}\frac{1}{3}((p-a)+(p-b)+(p-c)) = \frac{1}{3}p^{4/3}$. Epäyhtälössä valitsee yhtäsuuruus, jos ja vain jos $p-a = p-b = p-c$ eli $a = b = c$. [Todistetaan aritmeettis-geometrinen epäyhtälö kolmen luvun positiivisen luvun x, y ja z tapauksessa. On osoitettava, että $(x+y+z)^3 \ge 27xyz$ ja että $(x+y+z)^3 = 27xyz$ vain, jos $x = y = z$. Todistettava epäyhtälö on $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 3z^2x + 3zx^2 + 6xyz \ge 27xyz$. Kun otetaan huomioon epäyhtälö $3(x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2) \ge 0$, missä yhtäsuuruus on voimassa vain, jos $x = y = z$, todistettava epäyhtälö jää muotoon $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \ge 0$. Mutta tämän epäyhtälön vasen puoli voidaan kirjoittaa muotoon $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \ge 0$ (ks. esim. "Algebran alkeita" valmennuksen sivuilla). Vasemman puolen toinen sulkulauseke on $\frac{1}{2}((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2)$; se on ≥ 0 ja $= 0$ vain, kun $x = y = z$.]

7. *Osoita, että* $T = pr = \dfrac{abc}{4R}$ *ja että* $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

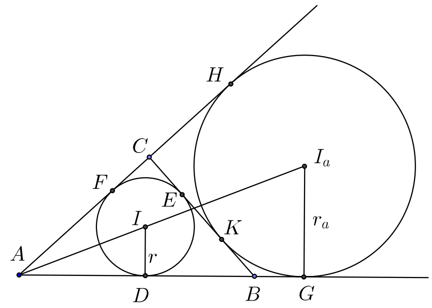
Ratkaisu. Jaetaan kolmio kolmeksi kolmioksi BCI, CAI ja ABI. Kunkin korkeus on r ja kannat a, b ja c. Siis $T = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr$. Väitetty r:n lauseke saadaan Heronin kaavasta. Toisaalta sinilauseen perusteella $T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab\frac{c}{2R}$.

Kolmion *sivuympyrä* on ympyrä, joka sivuaa yhtä kolmion sivua ja kahden muun sivun jatkeita. Merkitään sivuympyröiden säteitä kirjaimin r_a, r_b ja r_c.

8. *Osoita, että*

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}, \quad r_b = \sqrt{\frac{p(p-c)(p-a)}{p-b}}, \quad r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

Ratkaisu. (Katso kuvaa.) Koska pisteestä sivuamispisteisiin piirretyt tangenttien osat ovat yhtä pitkät, on $a = DB + FC = b + c - 2 \cdot AD$, joten $AD = \frac{1}{2}(b + c - a) = p - a$ ja $2 \cdot AG = AH + AG = AC + CK + AB + BK = 2p$. Siis $AG = p$. Yhdenmuotoisista kolmioista AGJ ja ADI saadaan



$$
\begin{aligned}
r_a = \frac{p}{p-a} r = \frac{p}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \\
= \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.
\end{aligned}
$$

r_b ja r_c saadaan kiertovaihtelulla.

9. *Osoita, että*

$$T = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) = \sqrt{r r_a r_b r_c}.$$

Ratkaisu. Ensimmäiset yhtälöt seuraavat yhtälöistä $T = pr$ ja $r_a = \dfrac{p}{p-a} r$ (vast. b ja c). Viimeinen alan lauseke saadaan, kun yhtälöt $T = pr$ ja tehtävässä annetut kolme ensimmäistä yhtälöä kerrotaan keskenään ja otetaan huomioon Heronin kaava.

10. *Osoita, että*

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

Ratkaisu. Numeroiden 9 ja 7 perusteella

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{T} = \frac{p}{pr} = \frac{1}{r}.$$

11. *Osoita, että* $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ *ja* $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Ratkaisu. Merkitään yhteenlaskukaavoissa $\alpha + \beta = x$. Silloin

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin\alpha\cos(x-\alpha) + \cos\alpha\sin(x-\alpha) \\
\cos x &= \cos\alpha\cos(x-\alpha) - \sin\alpha\sin(x-\alpha).
\end{aligned}
$$

Kun eliminoidaan $\cos(x-\alpha)$, saadaan $(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\sin(x-\alpha) = \sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha$ eli $\sin(x-\alpha) = \sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha$. Vastaavalla tavalla saadaan kosinin vähennyslaskukaava, kun eliminoidaan $\sin(x-\alpha)$.

12. *Osoita, että*

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

Ratkaisu.

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}.$$

Väite seuraa, kun osoittaja ja nimittäjä jaetaan tulolla $\cos\alpha\cos\beta$. (On tietenkin otettava huomioon, että eräillä α:n ja β:n arvoilla väitteenä oleva kaava ei ole mielekäs.)

13. *Osoita, että* $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ *ja* $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Ratkaisu. Ensimmäinen kaava on sinin yhteenlaskukaava, kun $\beta = \alpha$. Vastaavasti kosinin yhteenlaskukaava on tässä tapauksessa $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$. Edelleen $\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

14. *Osoita, että*

$$\sin(2x) = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}, \quad \cos(2x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \text{ja} \quad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Ratkaisu. Koska

$$1 + \tan^2 x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

niin

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x = 2\tan x\cos^2 x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

ja

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 x} - 1 = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

15. *Osoita, että*

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

Ratkaisu. Seuraa heti edellisestä.

16. *Osoita, että*

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Ratkaisu. Olkoon $x = t + u$ ja $y = t - u$. Silloin $2t = x + y$ ja $2u = x - y$. Toisaalta $\sin x + \sin y = \sin(t+u) + \sin(t-u) = (\sin t \cos u + \cos t \sin u) + (\sin t \cos u - \cos t \sin u) = 2 \sin t \cos u = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

17. *Osoita, että*

$$\sin(-x + y + z) + \sin(x - y + z) + \sin(x + y - z) - \sin(x + y + z) = 4 \sin x \sin y \sin z.$$

Ratkaisu. Ryhmitellään todistettavan yhtälön vasen puoli uudelleen ja käyytetään sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoja: $(\sin((x+y) - z) - \sin((x+y)+z)) + (\sin(z + (x-y)) + \sin(z - (x-y)) = -2\cos(x+y)\sin z + 2 \sin z \cos(x-y) = 4 \sin x \sin y \sin z$.

18. *Osoita, että*

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin(a+b) \sin(b+c) \sin(c+a) + \sin(2(a+b+c)).$$

Ratkaisu. Merkitään $a + b = x$, $b + c = y$ ja $c + a = z$. Silloin $x + y + z = 2(a+b+c)$ $-x + y + z = 2c$, $x - y + z = 2a$ ja $x + y - z = 2b$. Todistettava yhtälö muuttuu samaksi kuin edellisen numeron yhtälö.

19. *Osoita, että kolmiossa on*

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma.$$

Ratkaisu. Numeron 16 tulos, se että $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ja kaksinkertaisen kulman sinin kaava antavat

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\alpha+\beta)$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

Lisäksi $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos \frac{\gamma}{2}$, ja todistus on valmis.

20. *Osoita, että kolmiossa on*

$$r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

1. ratkaisu. Pätee $2T = 2pr = ab\sin\gamma$ eli $(a+b+c)r = ab\sin\gamma$. Muunnetaan a, b ja c sinilauseen avulla. Saadaan

$$2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)r = 4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

eli, kun käytetään kaksinkertaisen kulman sinin kaavaa,

$$\frac{r}{R} = \frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{16\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$$

Väite seuraa nyt edellisen numeron tuloksesta.

2. ratkaisu. Numeron 8 kuvan mukaisesti

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Siis

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} &= 1+\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p(p-a)+(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\\ &= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)+(a-b+c)(a+b-c)}{4p(p-a)}\\ &= \frac{(b+c)^2-a^2+a^2-(b-c)^2}{4p(p-a)} = \frac{bc}{p(p-a)},\end{aligned}$$

joten

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Kun muodostetaan kiertovaihtelulla toiset kaksi puolen kulman siniä ja kerrotaan lausekkeet, saadaan

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4prR} = \frac{r^2}{4rR} = \frac{r}{4R},$$

ja todistus on valmis.

21. *Osoita, että kolmiossa on* $\tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$*.*

Ratkaisu. Koska
$$\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$
ja
$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$
niin todistettavaksi jää yhtälö $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$ eli $\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma = \sin\gamma(-\cos(\alpha+\beta))$ eli $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0$. Mutta viimeinen yhtälö on tosi, koska $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

22. *Osoita, että kolmiossa on*
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Ratkaisu. Koska $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$, niin $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$. Siis
$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta)\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)\\
&= 1 + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\\
&= 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.
\end{aligned}$$

23. *Osoita, että* $\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ *ja* $\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$*.*

Ratkaisu. Seuraa suoraan kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavoista.

24. *Määritä lausekkeen* $\sin^2\alpha + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$ *suurin arvo (*α*,* β *ja* γ *kolmion kulmat).*

Ratkaisu. Oletetaan, että $\alpha \le \frac{\pi}{2}$ ja aluksi kiinteä. Koska $\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma))$ ja $\beta+\gamma = \pi-\alpha$ on kiinteä, lauseke on suurin, kun $\beta = \gamma$. Nyt $\alpha = \pi - 2\beta$, joten $\sin\alpha = \sin(2\beta)$ ja $\cos\alpha = -\sin(2\beta)$. Siis $\sin^2\alpha + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = \sin^2(2\beta) - \sin^2\beta\cos(2\beta) = \sin^2\beta(4\cos^2\beta - 2\cos^2\beta + 1) = \sin^2\beta(2\cos^2\beta+1) = \sin^2\beta(3-2\sin^2\beta) = -2\left(\sin^2\beta - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$. Koska β voidaan valita niin, että $\sin^2\beta = \frac{3}{4}$, lausekkeen suurin arvo tässä tapauksessa on $\frac{9}{8}$. Jos $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha$ on negatiivinen, mutta $\sin\beta$ ja $\sin\gamma$ ovat positiivisia. Lausekkeen arvo on siis pienempi kuin $\sin^2\alpha$ ja siis pienempi kuin 1.

25. *Osoita, että kolmiossa on*

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$$

ja jos $b \neq c$,

$$\frac{a}{b-c} = \frac{\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$$

(Mollweiden kaavat).

Ratkaisu. Käytetään hyväksi yksinkertaista algebrallista tosiasiaa, jonka mukaan

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{x+z}{y+t}.$$

Kun tätä sovelletaan sinilauseeseen, saadaan

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b+c}{\sin\beta+\sin\gamma}$$

eli

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Jälkimmäinen Mollweiden kaava saadaan samoin sinilauseesta seuraavasta relaatiosta

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b-c}{\sin\beta-\sin\gamma}.$$

26. *Kaksi reaalilukujonoa on määritelty seuraavasti:*

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3} \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$$

kaikilla $n \geq 1$. *Osoita, että* $2 < x_n y_n < 3$, *kun* $n > 1$.

Ratkaisu. Merkitään $x_n = \tan t_n$ ja $y_n = \tan u_n$. Silloin $t_1 = u_1 = \dfrac{\pi}{3}$ ja

$$\tan u_{n+1} = y_{n+1} = \frac{\tan u_n}{1+\dfrac{1}{\cos u_n}} = \frac{\sin u_n}{\cos u_n + 1} = \tan\frac{u_n}{2}.$$

Siis $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$ ja $u_n = \dfrac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$. Toisaalta

$$\begin{aligned}\tan t_{n+1} = x_{n+1} = \tan t_n + \frac{1}{\cos t_n} &= \frac{\sin t_n + 1}{\cos t_n} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t_n\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t_n\right)} \\ &= \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t_n}{2}\right)} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t_n}{2}\right) = \tan\left(\frac{t_n}{2} + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Siis $t_{n+1} = \dfrac{t_n}{2} + \dfrac{\pi}{4}$. Geometrisen sarjan summan kaavaa hyväksi käyttäen ja sieventäen saadaan

$$t_n = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}.$$

Mutta nyt

$$x_n y_n = \tan t_n \tan u_n = \frac{\cos\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^n} \sin\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}{\sin\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^n} \cos\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}} = \frac{2\cos^2\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^n}}{2\cos^2\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^n} - 1}.$$

Kun $n > 1$, kosinin argumentti edellä on välillä $(0, \dfrac{\pi}{6})$; tällöin kosini itse on välillä $(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1)$. Koska $z \mapsto \dfrac{2z}{2z-1}$ on vähenevä, kun $z > \dfrac{1}{2}$, niin $x_n y_n$:n arvot ovat välillä $(2, 3)$. Nähdään myös, että $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 2$.

27. *Muunna lauseke* $a \sin x + b \cos x$ *muotoon* $A \sin(x + \alpha)$.

Ratkaisu. Voidaan olettaa, että $a^2 + b^2 \neq 0$. Valitaan $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Silloin

$$\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{b}{A}\right)^2 = 1.$$

Koska siis $\left(\dfrac{a}{A}, \dfrac{b}{A}\right)$ on yksikköympyrän piste, on olemassa α siten, että $a = A \cos \alpha$ ja $b = A \sin \alpha$. Siis $a \sin x + b \cos x = A(\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) = A \sin(x + \alpha)$.

28. *Määritä funktion* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 8 \cos x + 15 \sin x - 17$ *suurin ja pienin arvo.* (Ylioppilastehtävä vuonna 1982, vilkasta keskustelua Suomi24-keskustelupalstalla 2009)

Ratkaisu. $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$. $f(x) = 17 \sin(x + \alpha) - 17$. Koska $-1 \le \sin(x + \alpha) \le 1$ ja molemmat rajat saadaan jollakin $x \in [0, 2\pi]$, f:n suurin arvo on 0 ja pienin -34.

29. *Olkoon $P_1(x) = x^2 - 2$ ja $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ kaikilla $j > 1$. Osoita, että kaikilla n yhtälön $P_n(x) = x$ kaikki juuret ovat reaalisia ja eri suuria.* (IMO 1976)

Ratkaisu. Polynomin P_j aste on kaksi kertaa polynomin P_{j-1} aste. Koska P_1 on toista astetta, P_j:n aste on 2^j. Huomataan, että $P(2\cos t) = 4\cos^2 t - 2 = 2(2\cos^2 t - 1) = 2\cos(2t)$. Induktiolla saadaan helposti, että $P_j(2\cos t) = 2\cos(2^j t)$. Yhtälö $P_n(2\cos t) = 2\cos t$ on siis sama kuin $\cos(2^n t) = \cos t$. Yhtälön toteuttavat t:n arvot $2^n t = t + 2k\pi$, $2^n t = -t + 2k\pi$, eli esimerkiksi välin $[0, \pi)$ luvut

$$t = \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1,$$
$$t = \frac{2k\pi}{2^n + 1}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}.$$

Lukuja on 2^n kappaletta. Jos ne ovat kaikki eri suuria, niin kukin tuottaa yhtälölle $P_n(2\cos t) = 2\cos t$ eri juuren, sillä kosinifunktio on monotoninen välillä $[0, \pi)$. Mutta jos $0 \le p \le 2^{n-1} - 1$ ja $1 \le q \le 2^{n-1}$ ja

$$\frac{2p}{2^n - 1} = \frac{2q}{2^n + 1},$$

niin $2^n(q - p) = q + p \le 2^n - 1$, mikä on mahdotonta. Olemme löytäneet yhtälölle $P_n(x) = x$ sen asteluvun osoittaman määrän eri suuria reaalisia juuria, joten olemme löytäneet ne kaikki.

30. *Ratkaise trigonometriaa käyttäen yhtälö $x^2 + px + q = 0$, kun $p^2 > 4q$.*

Ratkaisu. Olkoon $q > 0$. Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$\left(\frac{x}{\sqrt{q}}\right)^2 + \frac{p}{\sqrt{q}}\frac{x}{\sqrt{q}} + 1 = 0$$

eli yhtälön

$$-2\frac{\sqrt{q}}{p} = \frac{2\dfrac{x}{\sqrt{q}}}{1 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{q}}\right)^2}$$

kanssa. Jos valitaan t niin, että $\sin(2t) = -2\dfrac{\sqrt{q}}{p}$ ja x niin, että $x = \sqrt{q}\tan t$, niin yhtälö toteutuu. Jos $q < 0$, niin yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$\left(\frac{x}{\sqrt{|q|}}\right)^2 + \frac{p}{\sqrt{|q|}}\frac{x}{\sqrt{|q|}} - 1 = 0$$

eli

$$\frac{2\sqrt{|q|}}{p} = \frac{2\dfrac{x}{\sqrt{|q|}}}{1 - \left(\dfrac{x}{\sqrt{|q|}}\right)^2}$$

kanssa. Valitaan t niin, että $2\dfrac{\sqrt{|q|}}{p} = \tan 2t$ ja x niin, että $x = \sqrt{|q|}\tan t$. Yhtälö toteutuu.

31. *Ratkaise trigonometriaa käyttäen yhtälö* $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Ratkaisu. Merkitään $y = x + \frac{a}{3}$. Yhtälö saa muodon

$$y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0$$

eli merkintöjä lyhentäen $y^3 + py = q$. Olkoon nyt $y = 2r\cos t$. Yhtälö tulee muotoon $8r^3\cos^3 t + 2pr\cos t = q$ eli

$$4\cos^3 t + \frac{p}{r^2}\cos t = \frac{q}{2r^3}.$$

Olkoon $r = \sqrt{-\frac{p}{3}}$. Silloin yhtälö saa muodon $4\cos^3 t - 3\cos t = \cos(3t) = \frac{q}{2r^3}$. Tästä voidaan (jos parametrit ovat sopivia) ratkaista t, jonka jälkeen saadaan y ja x. [Osoittautuu, että menetelmä toimii silloin, kun kolmannen asten yhtälön kaikki juuret ovat reaalisia. Tällöin ns. Cardanon kaavoja käytettettäessä on koukattava kompleksilukujen kautta.]

32. *Ratkaise yhtälö* $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

Ratkaisu. Muuttujanvaihto $x = y - \frac{2}{3}$ johtaa yhtälöön $y^3 - \frac{19}{3}y = \frac{56}{27}$. Tästä saadaan $\frac{q}{2r^3} = \frac{28}{19\sqrt{19}}$. t:lle saadaan olennaisesti kolme eri likiarvoa $t = 0{,}408638$ ja $t = 0{,}408638 \pm \frac{2\pi}{3}$; Vastaavat y:n arvot ovat $2{,}666\ldots$, $-2{,}333\ldots$ ja $-0{,}333\ldots$. Siten alkuperäisellä yhtälöllä on kolme juurta $x = 2$, $x = -3$ ja $x = -1$.

33. *Määritä pinta-alaltaan suurin sellaisista nelikulmioista, joiden sivut ovat* a, b, c *ja* d.

Ratkaisu. Olkoon tarkasteltava nelikulmio $ABCD$ niin, että $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ ja $DA = d$. Olkoon vielä $\angle ABC = \phi$ ja $\angle CDA = \psi$ sekä nelikulmion ala S. Silloin $2S = ab\sin\phi + cd\sin\psi$ ja $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi = c^2 + d^2 - 2dc\cos\psi$. Siis

$$\begin{cases} ab\sin\phi + cd\sin\psi = 2S \\ ab\cos\phi - cd\cos\psi = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}. \end{cases}$$

Korotetaan yhtälöt puolittain neliöön ja lasketaan yhteen; saadaan

$$a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd(\sin\phi\sin\psi - \cos\phi\cos\psi) = 4S^2 + \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4}.$$

Nyt S on suurin mahdollinen, kun $\sin\phi\sin\psi - \cos\phi\cos\psi = -\cos(\phi + \psi)$ on suurin mahdollinen. Tämä tapahtuu silloin, kun $\phi + \psi = \pi$. Mutta nelikulmio, jonka vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia, on jännenelikulmio eli nelikulmio, jonka ympäri voidaan piirtää ympyrä.

34. *Jännenelikulmion sivut ovat a, b, c ja d. Määritä sen ala.*

Ratkaisu. Edellisen numeron mukaan (kun siis $\sin\phi\sin\psi - \cos\phi\cos\psi = 1$) alalle S saadaan, kun käytetään toistuvasti relaatiota $x^2 + y^2 = (x+y)(x-y)$,

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 \\ &= (2(ab+cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)(2(ab+cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \\ &= (-(a-b)^2+(c+d)^2)((a+b)^2-(c-d)^2) = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d). \end{aligned}$$

Jos otetaan käyttöön merkintä

$$p = \frac{a+b+c+d}{2},$$

huomataan, että $\dfrac{-a+b+c+d}{2} = p - a$ jne. Saadaan *Brahmaguptan kaava* jännenelikulmion pinta-alalle

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

35. *Todista, että jännenelikulmion lävistäjien tulo on sama kuin sen vastakkaisten sivuparien tulojen summa.* (*Ptolemaioksen lause*)

Ratkaisu. Käytetään edellisten numerojen merkintöjä. Olkoon $AC = x$ ja $BD = y$. Koska $\psi = \pi - \phi$, $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi$ ja myöskin $x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\phi$. Eliminoidaan näistä yhtälöistä $\cos\phi$. Saadaan $(ab+cd)x^2 = (a^2+b^2)cd + (c^2+d^2)ab = ad(ac+bd) + bc(bd+ca)$ eli

$$x^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}.$$

Kun tehdään kiertovaihtelu $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto d$, $d \mapsto a$, saadaan

$$y^2 = \frac{(ba+cd)(bd+ca)}{bc+da}.$$

Mutta kun edelliset kaksi yhtälöä kerrotaan keskenään, saadaan $x^2y^2 = (ac+bd)(bd+ca) = (ac+bd)^2$, eli väite.