Pickin lause

Pickin[1] lause tai Pickin kaava antaa yksinkertaisen keinon laskea monikulmion ala, kun monikulmion kaikki kärkipisteet ovat pisteitä, joiden koordinaatit ovat kokonaislukuja.

Kutsumme pisteitä (x, y), missä $x, y \in \mathbb{Z}$, *hilapisteiksi*. Sanomme, että yksinkertainen, siis itseään leikkaamaton monikulmio on *hilamonikulmio*, jos sen jokainen kärkipiste on hilapiste. Sanomme, että hilamonikulmion sisällä oleva hilapiste on sen sisähilapiste ja hilamonikulmion reunalla oleva hilapiste sen reunahilapiste. Pickin lause sanoo, että hilamonikulmion P ala $|P|$ saadaan lasketuksi yksinkertaisesta kaavasta

$$|P| = s + \frac{1}{2}r - 1,$$

missä s on kaikkien P:n sisähilapisteiden lukumäärä ja r kaikkien P:n reunahilapisteiden lukumäärä.

Esimerkkejä. Jos kolmion kärjet ovat origo, $(1, 0)$ ja $(1, 1)$, niin $s = 0$ ja $r = 3$; kolmion ala on $\frac{1}{2}$. Suorakaiteelle, jonka kärjet ovat origo, $(3, 0)$, $(3, 2)$ ja $(0, 2)$ on $s = 2$ (pisteet $(1, 1)$ ja $(2, 1)$ ovat sisäpisteitä) ja $r = 10$ (pisteet $(0, k)$, $(2, k)$, $k = 0, 1, 2, 3$, 8 kappaletta, sekä $(0, 1)$ ja $(3, 1)$ ovat reunalla). Ala on $2 + 5 - 1 = 6 = 2 \cdot 3$.

Todistetaan Pickin kaava oikeaksi. Tarvitsemme vain yksinkertaisia perusteita: suorakulmaisen kolmion alan laskukaavan ja monikulmion kulmasummatiedon. Sanomme hilamonikulmiota, joka on kolmio, *hilakolmioksi*. Samoin sanomme suorakaidetta, jonka kaikki kärjet ovat hilapisteitä ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset, *hilasuorakaiteeksi*. Sanomme suorakulmaista hilakolmiota, jonka kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, *suorakulmaiseksi hilakolmioksi*.

1. Jokaisen hilakolmion ala on vähintään $\frac{1}{2}$.

Todistus. Kolmion alan kaavan perusteella suorakulmaisen hilakolmion ala on $k \cdot \frac{1}{2}$ jollain kokonaisluvulla k. Olkoon ABC mielivaltainen hilakolmio. Kolmion kärkipisteiden x-koordinaateissa jokin on pienin ja jokin on suurin; olkoot ne x' ja x'', $x' < x''$. Samoin y-koordinaateista jokin on pienin ja jokin on suurin; olkoot ne y' ja y'', $y' < y''$. Suorat $x = x'$, $x = x''$, $y = y'$ ja $y = y''$ rajaavat hilasuorakaiteen R, jonka ala on kokonaisluku $(x'' - x')(y'' - y')$. ABC saadaan R:stä joko poistamalla siitä suorakulmaisia hilakolmioita 1 (ABC:n kärjet ovat R:n kärkiä), 2 (kaksi ABC:n kärkeä ovat R:n vierekkäiset kärjet tai kaksi kärkeä ovat R:n vastakkaiset kärjet ja kolmas kärki on R:n sivulla), 3 (vain yksi ABC:n kärki on R:n kärki) tai suorakaide ja kolme suorakulmaista hilakolmiota (kaksi ABC:n kärkeä ovat R:n kärkiä ja kolmas on R:n sisäpiste). Jokainen tapaus johtaa tilanteeseen, jossa A:n ala on kokonaisluku vähennettynä luvun $\frac{1}{2}$ monikerralla. Koska kolmion ala on positiivinen, sen on oltava vähintään $\frac{1}{2}$. $\square$

[1] Kaava on nimetty sen vuonna 1899 julkaisseen itävaltalaisen *Georg Alexander Pickin* (1859–1942) mukaan. Pääosan elämäntyöstään Prahassa tehnyt Pick kuoli – korkeassa iässä – Terezínin eli Theresienstadtin keskitysleirillä Tšekkoslovakiassa.

Sanomme, että hilakolmio ABC on *alkeishilakolmio*, jos sillä ei ole yhtään sisähilapistettä ja sen kaikki reunahilapisteet ovat kärkiä. Väitämme, että jokaiselle alkeishilakolmiolle pätee $|ABC| = \frac{1}{2}$. Todistusta varten tarvitaan ensin aputulos.

2. Jokainen monikulmio voidaan jakaa toisiaan monikulmion sisällä leikkaamattomilla monikulmion sisälävistäjillä kolmioiksi.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla monikulmion kärkien lukumäärän n suhteen. Jos $n = 4$, monikulmio on joko kupera tai ei-kupera nelikulmio. Jos se on kupera, kumpi hyvänsä sisälävistäjä jakaa sen kahdeksi kolmioksi, jos se ei ole kupera, nelikulmion "sisään työntyvästä" kärjestä piirretty sisälävistäjä jakaa sen kahdeksi kolmioksi.

Oletetaan sitten, että kaikki k-kulmiot, missä $k < n$, voidaan jakaa kolmioiksi väitetyllä tavalla. Olkoon P n-kulmio. Jos P:llä on ainakin yksi sisälävistäjä, se jakaa P:n kahdeksi monikulmioksi, joiden kärkien lukumäärä on $< n$. Induktio-oletuksen mukaan kumpikin näistä voidaan jakaa sisälävistäjillä kolmioiksi. Silloin myös P voidaan sanotulla tavalla jakaa. On vielä osoitettava, että P:llä on sisälävistäjä. Koska P on rajoitettu ja P:ssä on n sivua, no olemassa suora ℓ, joka ei leikkaa P:tä eikä ole yhdenkään P:n sivun suuntainen. Olkoon B jokin sellainen P:n kärkipiste, jolle B:n ja ℓ:n etäisyys on pienin kaikista ℓ:n ja P:n kärkipisteiden välisistä etäisyyksistä. Olkoot A ja C B:n viereiset kärkipisteet. Tavasta, jolla B on valittu, seuraa, että $\angle ABC < 180°$. Jos AC on P:n sisälävistäjä, asia on selvä. Ellei AC ole P:n sisälävistäjä, niin joko janalla AC on P:n kärkiä tai sillä on P:n ulkopuolisia pisteitä. Edellisessä tapauksessa jokin AC:llä oleva P:n kärki, esimerkiksi U, on lähinnä A:ta. Silloin AU on P:n sisälävistäjä. Jos AC:llä on P:n ulkopuolinen piste V, tarkastellaan janaa BX, kun X käy läpi janan AC. Joillakin X täytyy janalla BX olla P:n kärki tai kärkiä; jos Y on tällaisella janalla BX olevista kärjistä se, joka on lähinnä B:tä, niin BY on P:n sisälävistäjä. □

3. Jokainen hilakolmio ABC voidaan jakaa alkeishilakolmioiksi.

Todistus. Todistetaan ensin väite tapauksessa, jossa ABC:llä ei ole sisähilapisteitä. Jos sivulla AB ovat järjestyksessä hilapisteet $C_1, \ldots, C_n$ (niin että C_1 on lähinnä A:ta), niin jokainen kolmio CC_jC_{j+1} on alkeishilakolmio. Kolmion AC_1C sivulla AC ovat mahdollisesti hilapisteet $B_1, \ldots, B_m$ (B_1 lähinnä A:ta) ja kolmion C_nBA sivulla BA hilapisteet $A_1, \ldots,$ A_l (A_1 lähinnä B:tä. Nyt kolmiot AB_1C, $B_1B_2C_1$, $\ldots$, B_mCC_1 ovat alkeishilakolmioita, samoin BA_1C_n, $A_1A_2C_n$, $\ldots$, A_lCC_n.

Oletetaan sitten, että ABC:llä on sisähilapisteitä. Osoitetaan induktiolla sisähilapisteiden lukumäärän n suhteen, että jako voidaan suorittaa. Jos $n = 1$, yhdistetään ABC:n ainoa sisähilapiste D kolmion kärkiin. Syntyneissä komessa kolmiossa ei ole yhtään sisähilapistettä, joten ne ja siis koko ABC voidaan jakaa todistuksen alkuosan perusteella alkeishilakolmioiksi. Oletetaan, että jako voidaan suorittaa aina, kun sisähilapisteitä on $< n$. Jos ABC:llä on n sisähilapistettä, valitaan niistä yksi ja yhdistetään se kolmion kärkiin. Syntyneissä kolmessa kolmiossa on jokaisessa $< n$ sisähilapistettä, joten induktio-oletuksen nojalla ne, ja siis myös ABC, voidaan jakaa alkeishilakolmioiksi. □

Edellisistä todistuksista seuraa, että jokainen hilasuorakaide voidaan jakaa alkeishilakolmioiksi. Osoitetaan, että tällaisissa jaoissa on aina sama määrä alkeishilakolmioita.

4. Jos hilasuorakaide R, jolla on k sisähilapistettä ja m reunahilapistettä, jaetaan alkeishilakolmioiksi, niin tällaisten kolmioiden lukumäärä on $2k + m - 2$.

Todistus. Jokainen R:n sisähilapiste on jaossa kolmen tai useamman alkeishilakolmion yhteinen kärki. Näissä pisteissä on kolmion kärkikulmia yhteensä $k \cdot 360°$. Jokainen R:n reunahilapiste, joka ei ole R:n kärki, on ainakin kahden alkeishilakolmion kärki; näistä pisteistä kertyy alkeishilakolmioiden kärkiä yhteensä $(m - 4) \cdot 180°$. R:n neljä kärkeä ovat kukin yhden tai useamman alkeishilakolmion kärkiä; niistä kertyy alkeishilakolmioiden kulmia yhteensä $4 \cdot 90°$. Jos alkeishilakolmioita on n kappaletta, niiden kulmien summa on $n \cdot 180°$. Siis $n \cdot 180° = k \cdot 360° + (m - 4) \cdot 180° + 4 \cdot 90°$ eli $n = 2k + m - 2$. $\square$

5. Alkeishilakolmion ala on $\frac{1}{2}$.

Todistus. Olkoon ABC jokin alkeishilakolmio. Piirretään sen ympärille suorakaide samoin kuin kohdassa 1. Jos suorakaiteen sivut ovat m ja n, sen ala on mn. Suorakaiteella on $(m - 1)(n - 1)$ sisähilapistettä ja $2m + 2n$ reunahilapistettä. Jaetaan R alkeishilakolmioiksi niin, että yksi näistä on ABC. Alkeishilakolmioita on edellisen mukaan $2(m-1)(n-1) + 2(m+n) - 2 = 2mn$ kappaletta. Jokaisen ala on ainakin $\frac{1}{2}$. Kolmioiden yhteen laskettu ala on siis $\geq mn$ ja $> mn$, jos jokin kolmioista olisi alaltaan enemmän kuin $\frac{1}{2}$. $\square$

6. Jos hilamonikulmiolla P on s sisähilapistettä ja r reunahilapistettä, niin

$$|P| = s + \frac{r}{2} - 1.$$

Todistus. Olkoon nyt P n-kulmio. Silloin P:n kulmien summa on $(n - 2) \cdot 180°$. Edellä sanotun perusteella se voidaan jakaa alkeishilakolmioiksi. P:n reunahilapisteistä $r - s$ on sellaisia, jotka eivät ole P:n kärkiä. Jokainen P:n sisähilapiste on usean alkeishilakolmion kärki; kolmioiden kulmien summa tällaisessa pisteessä on 360°. Jokaisessa sellaisessa hilapisteessä, joka on P:n reunalla mutta joka ei ole P:n kärki, alkeishilakolmioiden kulmien summa on 180°. Jokaisessa P:n kärjessä jaon alkeishilakolmioiden kärkien summa on sama kuin monikulmion kyseisessä kärjessä oleva kulma. Jaon alkeishilakolmioiden kulmien summa on $s \cdot 360° + (r - n) \cdot 180° + (n - 2) \cdot 180° = (2s + r - 2) \cdot 180°$. Kolmioita on siis $2s + r - 2$ kappaletta. Koska jokaisen ala on $\frac{1}{2}$, P:n koko ala on $s + \frac{r}{2} - 1$. $\square$