Matematiikan olympiavalmennus

KOMPLEKSILUVUISTA

1 Perusteoriaa ja geometriaa

1.1 Kompleksilukujen määritelmä ja perusalgebraa

1. Joukossa $\mathbb{R}^2 = \{(x,\, y) | x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$ määritellään yhteen- ja kertolasku kaavoilla

$$(x,\, y) + (x',\, y') = (x + x',\, y + y'), \quad (x,\, y)(x',\, y') = (xx' - yy',\, xy' + x'y).$$

On helppoa vaikkakaan ei kovin mielenkiintoista varmistaa, että määritellyt laskutoimitukset noudattavat vaihdanta-, liitäntä- ja osittelulakeja, että yhteenlaskun neutraalialkio on $(0,\, 0)$ ja alkion $(x,\, y)$ vasta-alkio on $(-x,\, -y)$ ja että kertolaskun neutraalialkio on $(1,\, 0)$ ja alkion $(x,\, y) \neq (0,\, 0)$ käänteisalkio on

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2},\, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Näin $\mathbb{R}^2$:sta tulee algebrallinen *kunta*. Kuntana $\mathbb{R}^2$:sta käytetään merkitää $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$:n alkiot ovat *kompleksilukuja*.

2. Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = (x,\, 0)$, on laskutoimitukset säilyttävä bijektio. Näin ollen $\mathbb{R}' = f(\mathbb{R})$ on reaalilukujen joukon kanssa isomorfinen $\mathbb{C}$:n osajoukko. Merkitään $(x,\, 0) = x$ ja samastetaan $\mathbb{R}'$ ja $\mathbb{R}$. Täten $\mathbb{C}$ on $\mathbb{R}$:n laajennus.

3. Koska $(0,\, 1)(y,\, 0) = (0,\, y)$, on $(x,\, y) = (x,\, 0) + (0,\, 1)(y,\, 0) = x + (0,\, 1)y$. Merkitään $(0,\, 1) = i$. Silloin $(x,\, y) = x + yi$. Kompleksilukua i kutsutaan *imaginaariyksiköksi*.

Jos $z = x + yi$, merkitään $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

$i^2 = (0,\, 1)(0,\, 1) = (-1, 0) = -1$. Kompleksilukujen kertolasku voidaan suorittaa reaalilukujen laskutoimituksin lisäyksellä $i^2 = -1$.

4. Kompleksiluvun $z = x + yi$ *liittoluku* eli *konjugaatti* on $\overline{z} = x - yi$. Liittoluvun muodostus noudattaa sääntöjä $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$. Luvun $z = x + yi$ *itseisarvo* eli *moduli* on reaaliluku $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pätee $|z|^2 = z\overline{z}$, josta seuraa mm.

$$|\overline{z}| = |z|, \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \quad \text{ja} \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Kompleksiluvun reaali- ja imaginaariosa voidaan lausua luvun ja sen liittoluvun avulla: $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ ja $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

Koska $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, on $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|$ ja siis $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$. Kompleksilukujen itseisarvo toteuttaa siis *kolmioepäyhtälön*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1.2 Kompleksilukujen geometrinen esitys

5. Koska (joukkoina) $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{C}$ ovat samat, kompleksiluku $z = (x, y) = x + iy$ voidaan samastaa tason koordinaattipisteen $P = (x, y)$ tai origon O tähän koordinaattipisteeseen yhdistävän vektorin $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ kanssa. Kompleksilukujen yhteenlaskua vastaa vektorien yhteenlasku ja sellaista kertolaskua, jossa toinen tulon tekijä on reaaliluku, vektorin kertominen reaaliluvulla. Joukko $\mathbb{R}$ on tässä mallissa x-akseli. $|\overrightarrow{OP}| = |z|$.

6. Positiivisen x-akselin ja vektorin OP välinen x-akselista positiiviseen kiertosuuntaan mitattu kulma on kompleksiluvun z *argumentti* $\arg z$. Koska $x = \operatorname{Re} z = |z|\cos(\arg z)$ ja $y = \operatorname{Im} z = |z|\sin(\arg z)$, on

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) = |z|(\cos(\arg z + 2n\pi) + i\sin(\arg z + 2n\pi)).$$

Nähdään heti, että $\arg(\overline{z}) = 2\pi - \arg z = -\arg z \pmod{2\pi}$.

7. Jos $z_1 = |z_1|(\cos t_1 + i\sin t_1)$ ja $z_2 = |z_2|(\cos t_2 + i\sin t_2)$, niin

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= |z_1||z_2|(\cos t_1\cos t_2 - \sin t_1\sin t_2 + i(\cos t_1\sin t_2 + \sin t_1\cos t_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2)) \end{aligned}$$

Tästä seuraa $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ ja $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$. Tulos yleistyy induktiolla tuloon, jossa on mielivaltainen määrä tekijöitä. Tästä seuraa erityisesti, että jos $z = r(\cos t + i\sin t)$, niin $z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt)$, kun $n \in \mathbb{N}$ (De Moivren kaava). Osamäärälle saadaan

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

Hyödyllinen havainto on myös $\arg(z\overline{w}) = \arg z - \arg w$.

1.3 Kompleksiset juuret sekä eksponentti- ja logaritmifunktio

8. Jos $\sqrt[n]{a}$ on luku, jolle $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ja jos $a = r(\cos t + i\sin t)$, niin jokainen luvuista

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{t + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1, \tag{1}$$

voi olla $\sqrt[n]{a}$. Luvut (1) ovat yhtälön

$$z^n = a$$

ratkaisut.

Esimerkkejä. $\sqrt[3]{1}$ on joko 1, $\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ tai $\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\sqrt{i}$ on joko $\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}+\dfrac{i}{2}\sqrt{2}$ tai $\cos\dfrac{5\pi}{4}+\sin\dfrac{5\pi}{4}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}-\dfrac{i}{2}\sqrt{2}$. Yhtälön $z^n = 1$ ratkaisut $z_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ovat n:nsiä *yksikköjuuria*.

9. Koska

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!} = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots+i(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots) = \cos t + i\sin t,$$

voidaan kirjoittaa $z = r(\cos t + i\sin t) = re^{it}$ (Eulerin kaava).

10. Edellisen perusteella $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Siis $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$ ja $\arg e^z = y = \operatorname{Im} z$. (Voidaan osoittaa, että sarjan avulla määritelty kompleksinen eksponenttifunktio toteuttaa samat laskusäännöt kuin reaalinen eksponenttifunktiokin.) Olkoon $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ mielivaltainen kompleksiluku. Yhtälö $e^z = w$ merkitsee, että $e^x = |w|$ eli $x = \ln|w|$ ja $y = \arg w \pmod{2\pi}$. Kompleksiluvun w logaritmilla $\log w$ on siten äärettömän monta arvoa: $\log w = \ln|w| + i\arg w + 2n\pi i$. Arvoista yksi on aina valittavissa niin, että sen imaginaariosa on välillä $[0, 2\pi]$. Ne logaritmin ominaisuudet, jotka ovat seurausta eksponenttifunktion laskusäännöistä, periytyvät sellaisinaan kompleksisille logaritmeille. Siten mm.

$$\log(w_1w_2) = \log w_1 + \log w_2.$$

Esimerkkejä. Koska $\arg(-1) = \pi$, niin $\log(-1) = i\pi + 2n\pi i$. $\log(ei) = 1 + \dfrac{i\pi}{2} + 2n\pi i$.

11. Yleinen *potenssi* z^w määritellään nyt lukuna $e^{w\log z}$. Potenssilla on yleensä äärettömän monta eri arvoa.

Esimerkki. $i^i = e^{i\log i} = e^{i(i\frac{\pi}{2}+2n\pi i)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2n\pi}$. Luvun i^i likiarvoja ovat siten esim. 0,00000000135 ($n = 3$), 0,20788 ($n = 0$) ja 17093171649 ($n = -4$).

1.4 Kompleksitason geometriaa

12. Jos $z = x + yi$ on kompleksitason piste, niin $\overline{z} = x - yi$ on z:n symmetriapiste x-akselin suhteen, $-z = -x - yi$ on z:n symmetriapiste origon suhteen ja $-\overline{z} = -x + yi$ on z:n symmetriapiste y-akselin suhteen.

13. Jos z_1 ja z_2 ovat kompleksitason pisteitä, niin z on samalla suoralla kuin z_1 ja z_2, jos ja vain jos vektorien $\overrightarrow{zz_1}$ ja $\overrightarrow{zz_2}$ välinen kulma on 0 tai π. Tämä on sama asia kuin se, että jollain reaaliluvulla k on

$$\frac{z-z_2}{z-z_1} = k$$

eli

$$z = \frac{z_2 - kz_1}{1-k}. \tag{2}$$

Jos $k < 0$, z on pisteiden z_1 ja z_2 välissä, jos $0 < k < 1$, z_2 on z:n ja z_1:n välissä, ja jos $1 < k$, z_1 on z:n ja z_2:n välissä. Yhtälön (2) kanssa yhtäpitäviä samalla suoralla olemisen ehtoja ovat

$$z = pz_1 + qz_2, \quad p,\, q \in \mathbb{R}, \quad p + q = 1$$

ja

$$az + bz_1 + cz_2 = 0, \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}, \quad a + b + c = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Esimerkki. Janan $[z_1,\, z_2]$ keskipisteessä $k = -1$, joten keskipiste on $z_M = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Jos z_3 on kolmas piste, kolmion, jonka kärjet ovat z_1, z_2 ja z_3 painopiste on se piste, jossa jana $[z_3,\, z_M]$ jakautuu suhteessa $2:1$; tämä piste on $(k = -\dfrac{1}{2})$

$$z_G = \frac{z_M + \frac{1}{2}z_3}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3)}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Yleisemmin minkä tahansa tason pistejoukon $\{z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_k\}$ painopiste on

$$m = \frac{1}{k}(z_1 + z_2 + \cdots + z_k).$$

14. Pisteet z_1, z_2, z_3 ja z_4 ovat samalla ympyrällä, jos ja vain jos joko $\arg\dfrac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg\dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3}$ tai $\arg\dfrac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} + \arg\dfrac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3} = \pi$ (kehäkulmalause). Tämä merkitsee, että *kaksoissuhde*

$$\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3} = \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3}$$

on reaalinen. Jos suhde on reaalinen, pisteet z_1, z_2, z_3 ja z_4 ovat samalla ympyrällä tai samalla suoralla. Jos pisteet eivät ole samalla suoralla ja kaksoissuhde on negatiivinen, nelikulmio $z_1z_2z_3z_4$ on kupera ja sen ympäri voidaan piirtää ympyrä.

15. Olkoon $z_1z_2\ldots z_n$ kupera positiivisesti suunnistettu monikulmio kompleksitasossa. Merkitään $z_{n+1} = z_1$. Osoitetaan, että monikulmion pinta-ala on

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\overline{z}_k\right).$$

Tämä nähdään seuraavasti: Ensinnäkin jokaiselle kompleksiluvulle z on

$$\overline{z\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_k + \overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}} = \overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_k + z\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_{k+1},$$

joten edellisen yhtälön lauseke on aina reaalinen. Tästä seuraa

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}(z_{k+1}+z)(\overline{z}_k+\overline{z})\right)$$
$$=\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\overline{z}_k\right)+\operatorname{Im}\left(z\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_k+\overline{z}\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\right)+\operatorname{Im}(n|z|^2)=\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k+1}\overline{z}_k\right).$$

Koska pinta-alaksi väitetyn summan arvo ei muutu,kun jokaiseen z_k:hon lisätään z, voidaan monikulmio siirtää niin, että origo on sen sisäpuolella. Jos nyt $z_k = r_k(\cos t_k + i\sin t_k)$, on $\operatorname{Im}(z_{k+1}\overline{z}_k) = r_{k+1}r_k\sin(t_{k+1}-t_k)$ eli kaksi kertaa sen kolmion ala, jonka kärjet ovat O, z_k ja z_{k+1}. Koska koko monikulmion ala saadaan laskemalla yhteen kaikkien kolmioiden Oz_kz_{k+1} alat, väite seuraa. – Itse asiassa monikulmion $z_1z_2\dots z_n$ kuperuutta ei tarvitse olettaa, riittää että monikulmio on *tähdenmuotoinen* jonkin pisteen suhteen, siis että monikulmion kaikki kärjet voidaan yhdistää janoilla tähän pisteeseen.

Jos kolmion kärjet ovat a, b ja c, niin edellisen mukaan kolmion ala on $S=\frac{1}{2}|\operatorname{Im}(a\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{a})|$ tai esimerkiksi $S=\frac{1}{2}|\operatorname{Im}(b-a)(\overline{c}-\overline{a})|$.

16. Samoin suunnistetut kolmiot $A_1A_2A_3$ ja $B_1B_2B_3$ ovat yhdenmuotoiset, jos (esim.)

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3}=\frac{B_1B_2}{B_1B_3}\quad\text{ja}\quad \angle A_2A_1A_3=\angle B_1B_2B_3.$$

Jos pistettä A_i (B_i) vastaa kompleksiluku a_i (b_i), niin yhdenmuotoisuusehdoista edellinen sanoo, että kompleksiluvuilla $\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}$ ja $\frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$ on sama moduli, jälkimmäinen, että niillä on sama argumentti. Yhdenmuotoisuus vallitsee siis, jos (ja elleivät kolmiot surkastu, vain jos)

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}=\frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}. \tag{3}$$

Jos kolmiot ovat vastakkaisesti suunnistetut, saadaan pari samoin suunnistettuja kolmioita peilaamalla toinen kolmio x-akselin yli. Yhdenmuotoisuusehto on tässä tapauksessa

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}=\frac{\overline{b}_2-\overline{b}_1}{\overline{b}_3-\overline{b}_1}.$$

Yhtälö (3) voidaan kirjoittaa symmetriseen muotoon

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0.$$

[Oletamme kolmiristen determinanttien perusominaisuudet tunnetuiksi; ne eivät riipu siitä, ovatko determinantin alkiot reaalisia vai kompleksisia.]

17. Jos kolmio $A_1A_2A_3$ on yhdenmuotoinen kolmion $A_2A_3A_1$ kanssa, se on tasasivuinen. Edellisin merkinnöin tämä toteutuu, kun

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Edellinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ kanssa ja edelleen yhtälön

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2 = 0$$

kanssa.

1.5 Analyyttisen geometrian yhtälöiden kompleksimuotoja

18. Yhtälöparit

$$z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy$$

ja

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = -\frac{i}{2}(z - \overline{z})$$

ovat yhtäpitävät. Tätä tietoa hyväksi käyttäen relaatiot $f(x, y) = 0$ voidaan muuntaa relaatioiksi $\phi(z, \overline{z}) = 0$.

19. Suoran yhtälö $ax + by + c = 0$ muuntuu muotoon

$$\frac{a}{2}(z + \overline{z}) - \frac{bi}{2}(z - \overline{z}) + c = \frac{1}{2}((a - bi)z + (a + ib)\overline{z}) + c = 0$$

eli

$$\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0, \tag{4}$$

missä c on reaaliluku. Jos suora kulkee pisteen z_0 kautta, on oltava $c = -\alpha z_0 - \overline{\alpha z_0}$. Suoran yhtälö on siis

$$\alpha(z - z_0) + \overline{\alpha}(\overline{z} - \overline{z}_0) = 0.$$

Jos z, z_1 ja z_2 eivät ole samalla suoralla, ne muodostavat kolmion, joka ei ole (suoraan) yhdenmuotoinen sen kolmion kanssa, jonka kärjet ovat $\overline{z}$, $\overline{z}_1$ ja $\overline{z}_2$. Edellä kolmioiden yhdenmuotoisuudesta tehty tarkastelu merkitsee, että pisteet ovat samalla suoralla, jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & z_1 & z_2 \\ \overline{z} & \overline{z}_1 & \overline{z}_2 \end{vmatrix} = 0.$$

20. Suoran $\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0$ eli $(\alpha + \overline{\alpha})x + i(\alpha - \overline{\alpha})y + c = 0$ kulmakerroin on

$$k = -\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{i(\alpha - \overline{\alpha})} = i\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{\alpha - \overline{\alpha}}. \tag{5}$$

Jos suoran ja x akselin välinen kulma on ϕ, niin $k = \tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$. Yhtälöstä (5) voidaan ratkaista

$$-\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} = \frac{\cos\phi + i\sin\phi}{\cos\phi - i\sin\phi} = \frac{e^{i\phi}}{e^{-i\phi}} = e^{2\phi i}$$

ja edelleen

$$\phi = \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\right).$$

Kahden eri suoran $\alpha z + \overline{\alpha z} + a = 0$ ja $\beta z + \overline{\beta z} + b = 0$ väliseksi kulmaksi saadaan

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\right) - \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right) = \frac{i}{2}\log\left(\frac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\beta}}\right).$$

Tästä saadaan suorien yhdensuuntaisuudelle ehto $\overline{\alpha}\beta = \alpha\overline{\beta}$ eli

$$\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} - \frac{\beta}{\overline{\beta}} = 0$$

ja kohtisuoruudelle $\overline{\alpha}\beta = -\alpha\overline{\beta}$ eli

$$\frac{\alpha}{\overline{\alpha}} + \frac{\beta}{\overline{\beta}} = 0.$$

Ehto toteutuu esim. jos $\beta = i\alpha$.

21. Pisteen z_0 kautta kulkevan ja suoraa (4) vastaan kohtisuoran suoran yhtälöksi saadaan edellisestä

$$\alpha(z - z_0) - \overline{\alpha}(\overline{z} - \overline{z}_0) = 0.$$

Yhtälöparista

$$\begin{cases} \alpha z - \overline{\alpha z} = \alpha z_0 - \overline{\alpha z}_0 \\ \alpha z + \overline{\alpha z} = -c \end{cases}$$

saadaan pisteen z_0 kohtisuoraksi projektioksi suoralla (4)

$$z_1 = \frac{\alpha z_0 - \overline{\alpha z}_0 - c}{2\alpha}.$$

Pisteen z_0 etäisyys suorasta (4) on

$$|z_0 - z_1| = \left|\frac{2\alpha z_0 - \alpha z_0 + \overline{\alpha z}_0 + c}{2\alpha}\right| = \frac{|\alpha z_0 + \overline{\alpha z}_0 + c|}{2|\alpha|}.$$

22. Pisteen z_0 kautta kulkeva kompleksiluvun w esittämän vektorin suuntaisen suoran pisteissä z on $z - z_0 = tw$, missä t on reaaliluku. Tämä merkitsee, että pisteissä toteutuu yhtälö

$$\frac{z - z_0}{w} = \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{\overline{w}}$$

eli

$$\overline{w}z - w\overline{z} + w\overline{z}_0 - \overline{w}z_0 = 0.$$

Kun tätä verrataan yhtälöön (4) (jossa c on reaalinen!), saadaan $\alpha = i\overline{w}$.

23. Ympyrän $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ yhtälöksi saadaan kuten numerossa 19

$$z\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0, \tag{6}$$

missä $\alpha = \frac{1}{2}(a - ib)$. Jos ympyrän keskipiste on μ ja säde r, niin ympyrän yhtälö on myös $|z - \mu| = r$ eli

$$(z - \mu)(\overline{z} - \overline{\mu}) = r^2.$$

Siis $\alpha = -\overline{\mu}$ ja $c = |\mu|^2 - r^2$.

Jos z_0 on ympyrän (6) ulkopuolella, sen potenssi ympyrän suhteen on

$$(|z_0 - \mu| + r)(|z_0 - \mu| - r) = |z_0 - \mu|^2 - r^2 = z_0\overline{z}_0 + \alpha z_0 + \overline{\alpha z}_0 + c.$$

Jos piste z_0 on ympyrän sisäpuolella, edellisen kaavan termi $|z_0 - \mu| - r$ on muutettava vastaluvukseen; tässä tapauksessa z_0 potenssi ympyrän (6) suhteen on siis $-(z_0\overline{z}_0 + \alpha z_0 + \overline{\alpha z}_0 + c)$.

1.6 Tavalliset geometriset transformaatiot kompleksitasossa

24. Jos $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on jokin kompleksitason transformaatio, niin merkitään $T(z) = z'$, $T(z_k) = z'_k$ jne.

Sellainen tason *siirto*, jossa origo siirtyy pisteeseen w on kuvaus $z' = T(z) = z + w$.

25. Tason *kierto* origon ympäri kulman ϕ verran vastapäivään on $T(z) = e^{i\phi}z$. Kierto pisteen w ympäri on $z' = T(z) = w + e^{i\phi}(z - w) = e^{i\phi}z + w(e^{i\phi} - 1)$, sillä se saadaan aikaan siirtämällä w origoon, kiertämällä origon ympäri ja siirtämällä origo takaisin pisteeseen w.

Olkoon $|a| = 1$, $a \neq 1$ ja $T(z) = az + b$. Silloin

$$T(z) = az + \frac{b}{a - 1}(a - 1),$$

joten T on kierto pisteen $\frac{b}{a - 1}$ ympäri. Kahden kierron yhdistäminen on kierto tai siirto: jos $T_1(z) = a_1 z + b_1$, $T_2(z) = a_2 z + b_2$ ovat kiertoja, niin $T_2(T_1(z)) = (a_2 a_1)z + a_2 b_1 + b_2$, missä $|a_1 a_2| = 1$.

26. Kuvaus $T(z) = \overline{z}$ on *peilaus* x-akselin yli. Origon kautta kulkeva suora ℓ: $\alpha z + \overline{\alpha z} = 0$, on numeron 22 mukaan vektorin $w = \dfrac{i\overline{\alpha}}{|\alpha|}$ suuntainen. Transformaatio

$$T(z) = w(\overline{\overline{w}z}) = w^2\overline{z} = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\overline{z}$$

on yhdistetty kierrosta, jolla suora ℓ kääntyy x-akseliksi, peilauksesta x-akselin yli ja kierrosta, jolla x-akseli palautuu suoraksi ℓ. Transformaatio on siis peilaus suorassa ℓ. Yleinen suora $\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 0$ leikkaa x-akselin pisteessä $-\dfrac{c}{\alpha + \overline{\alpha}}$. Näin ollen peilaus tässä suorassa on

$$T(z) = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}\left(\overline{z} + \frac{c}{\alpha + \overline{\alpha}}\right) - \frac{c}{\alpha + \overline{\alpha}}.$$

27. Origokeskinen *homotetia*, jossa homotetiasuhde on $k \in \mathbb{R}$, on $T(z) = kz$. Homotetia, jonka homotetiakeskus on w, on $T(z) = w + k(z - w) = kz + (1 - k)w$.

28. Olkoon $a = |a|e^{i\phi} \in \mathbb{C}$ mielivaltainen. Kuvaus

$$T(z) = az + b = a\left(z + \frac{b}{a}\right) = |a|\left(e^{i\phi}\left(z + \frac{b}{a}\right)\right)$$

on translaatiosta, kierrosta ja homotetiasta yhdistetty. Koska kukin näistä kuvaustyypeistä säilyttää kuvioiden yhdenmuotoisuuden, T on *yhdenmuotoisuuskuvaus*. Numeron 16 tarkasteluista seuraa, että jokainen yhdenmuotoisuuskuvaus on joko muotoa $T(z) = az + b$ tai $T(z) = a\overline{z} + b$.

29. *Inversio* origokeskisessä 1-säteisessä ympyrässä on kuvaus $T(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$. Inversio z_0-keskisessä ja r-säteisessä ympyrässä määrittyy kaavalla

$$T(z) = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}.$$

2 Algebran peruslause

30. Todistetaan *algebran peruslause*. Sen mukaan jokaisella polynomilla

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

missä kertoimet a_j ovat kompleksilukuja, on ainakin yksi nollakohta, ts. yhtälöllä $P(z) = 0$ on ainakin yksi ratkaisu. Todistus vaatii hiukan analyysin käsitteitä ja tietoja.

31. Kompleksilukujonolla z_j, $j = 1, 2, \ldots$, eli (z_j) on *raja-arvo* z, jos $|z_n - z|$ on mielivaltaisen pieni kaikilla tarpeeksi suurilla n:n arvoilla. (Tämä voidaan lausua täsmällisemminkin, mutta tarpeisiimme riittää tämä.) Jos P on polynomi, $w_j = P(z_j)$ ja jonolla (z_j) on raja-arvo z, niin jonolla (w_j) on raja-arvo $w = P(z)$. Tämä seuraa siitä, että

$$|w_j - w| = |P(z_j) - P(z)| = |z_j^n - z^n + a_{n-1}(z_j^{n-1} - z^{n-1}) + \cdots + a_1(z_j - z)| = |z_j - z|Q(z_j,\, z).$$

Kun j on tarpeeksi suuri, $|z_j - z|$ on pieni; tällöin lauseke $Q(z_j,\, z)$ on kiinteän ylärajan alapuolella, ja tulo $|z_j - z|Q(z_j,\, z)$ tulee sekin mielivaltaisen pieneksi.

32. Tarkastellaan kaikkien niiden reaalilukujen joukkoa E, jotka jollain z:n arvolla ovat muotoa $|P(z)|$. Luku x on E:n *alaraja*, jos jokainen E:n alkio on $\geq x$. Jokainen ei-positiivinen luku on E:n alaraja. Reaalilukujen perusominaisuuksia on, että E:n alarajojen joukossa on *suurin alaraja*. (Sitä kutsutaan myös E:n *infimumiksi* ja merkitään $\inf E$.) Olkoon tämä suurin alaraja a. Havaitaan, että jos $|P(z)| \neq a$, on olemassa $z' \neq z$ siten, että $|P(z')| < |P(z)|$. Jos nimittäin kaikilla $z' \in \mathbb{C}$ olisi $|P(z)| \leq |P(z')|$, olisi $|P(z)|$ a:ta suurempi E:n alaraja.

33. Osoitetaan, että jollain z_0 pätee yhtälö $|P(z_0)| = a$. Tehdään vastaoletus: $P(z) > a$ kaikilla z. Jos näin on, voidaan löytää luku z_1, jolle $|P(z_1)| < a + 1$ ja päättymätön jono (z_j), jolla on esim. ominaisuus $|P(z_{j+1})| - a < \frac{1}{2}(|P(z_j)| - a)$ ja siis myös $|P(z_j)| < a + \frac{1}{2^j}$. Tehty määrittely takaa, että kaikki jonon (z_n) luvut ovat eri lukuja. Koska

$$|P(z)| = |z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|$$

ja koska termit, joissa z on nimittäjässä, tulevat pieniksi, kun $|z|$ on suuri, niin $|P(z)|$ tulee suureksi, kun z on tarpeeksi suuri. Tästä seuraa, että kaikki jonon (z_j) luvut ovat jossain neliössä $Q = \{z \in C | -R < \operatorname{Re} z < R,\ -R < \operatorname{Im} z < R\}$. Jaetaan Q neljään yhtä suureen neliöön. Koska jonossa (z_j) on äärettömän monta lukua, jossain näistä neljästä neliöstä, esim. neliössä Q_1, on äärettömän monta luvuista z_j. Prosessia voidaan jatkaa: jos Q_1 jaetaan neljäksi neliöksi, jossain näistä, esim neliössä Q_2, on äärettömän monta luvuista z_j jne. Neliöt (Q_m) ovat sisäkkäin ja niiden sivujen pituudet ovat $\frac{1}{2^m}R$. Tästä seuraa, että neliöiden kärkipisteet muodostavat kompleksilukujonot, joilla on sama raja-arvo z_0. Lukujonosta (z_j) voidaan poimia ääretön osajono (z_{j_k}), jonka raja-arvo on myös z_0. Jonon $|P(z_{j_k})|$ raja-arvo on $P(z_0)$. Jos olisi $|P(z_0)| > a$, jouduttaisiin ristiriitaan ominaisuuden $|P(z_{j_k})| < a + \frac{1}{2^{j_k}}$ kanssa. Siis $|P(z_0)| = a$.

34. Osoitetaan vielä, että $a = 0$. Oletetaan, että näin ei ole, että $a > 0$ ja $P(z_0) = w_0 = a(\cos\phi_0 + i\sin\phi_0) = ae^{i\phi_0}$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$P(z) = (z - z_0)^n + b_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + \cdots + b_1(z - z_0) + w_0.$$

Olkoon k pienin indeksi, jolla $b_k \neq 0$. Silloin

$$P(z) = w_0 + b_k(z - z_0)^k(1 + Q(z)),$$

missä $Q(z)$ on polynomi, jonka arvot ovat pieniä, kun z on lähellä z_0:aa. Voidaan esimerkiksi valita niin pieni r, että kun $z = z_0 + re^{i\phi}$, niin $|Q(z)| < \frac{1}{2}$ ja samalla $2r^k|b_k| < a$. Näillä z:n arvoilla

$$P(z) = ae^{i\phi_0} + r^k|b_k||1 + Q(z)|e^{i(k\phi+\alpha+\beta(z))},$$

missä $\alpha = \arg b_k$ ja $\beta(z) = \arg(1 + Q(z))$. Tehdystä oletuksesta seuraa, että $|\beta(z)| < \frac{\pi}{4}$ ja $|1 + Q(z)| < 2$. Edelleen löytyy ϕ niin, että $k\phi + \alpha + \beta(z) = \phi_0 + \pi$. Mutta tällä ϕ:n arvolla

$$P(z) = P(z_0 + re^{i\phi}) = (a - r^k|b_k||1 + Q(z)|)e^{i\phi_0}$$

ja $|P(z)| < a$. Tultiin ristiriitaan sen kanssa, että a on $|P(z)|$:n arvojen alaraja. Siis vastaoletus onkin väärä, ja $P(z_0) = 0$. Algebran peruslause on todistettu.

3 Tehtäviä ja ratkaisuja

3.1 Tehtäviä

35. Johda $\sin 6x$:n ja $\cos 6x$:n lausekkeet $\sin x$:n ja $\cos x$:n polynomeina.

36. Laske

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k.$$

37. Jos a ja b ovat kokonaislukuja, niin $z = a + ib$ on *kompleksinen kokonaisluku*. Jos kompleksista kokonaislukua z ei voida kirjoittaa muotoon $z = z_1 z_2$, missä z_1 ja z_2 ovat kompleksisia kokonaislukuja $\neq 1$, niin z on *kompleksinen alkuluku*. Selvitä, mitkä joukon $\{3, 5, 7\}$ luvut ovat kompleksisia alkulukuja.

38. Selvitä, mitä tapahtuu suoralle ja ympyrälle inversiokuvauksessa.

39. Olkoon $\varepsilon \neq 1$ yhtälön $z^3 = 1$ jokin ratkaisu. Osoita, että eri pisteet z_1, z_2 ja z_3 ovat tasasivuisen kolmion kärjet jos ja vain jos

$$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0.$$

40. Kuperan nelikulmion $ABCD$ sivuille piirretään (ulkopuolisesti) tasasivuiset kolmiot ABM, BCN, CDP ja DAQ. Osoita, että nelikulmioilla $ABCD$ ja $MNPQ$ on sama painopiste.

41. Todista *Napoleonin lause*: Kolmion ABC sivut kantoina kolmion ulkopuolelle piirrettyjen tasasivuisten kolmioiden painopisteet ovat tasasivuisen kolmion kärjet.

42. Selvitä, miten säännöllinen 5-kulmio voidaan konstruoida lähtemällä yhtälön $z^5 = 1$ ratkaisusta.

43. Olkoon P kolmion ABC sisäpiste. Osoita, että kolmio, jonka kärjet ovat kolmioiden ABP, BCP ja CAP painopisteet, ala on yhdeksäsosa kolmion ABC alasta.

44. Todista kompleksilukuja käyttämällä *Cevan lause* (oikeastaan sen puolikas): jos X, Y ja Z ovat kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pisteitä ja jos AZ, BY ja CX leikkaavat samassa pisteessä, niin

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1,$$

3.2 Ratkaisuja

35. Eulerin kaavaa ja Pascalin kolmiota hyödyntämällä saadaan $\cos(6x) + i\sin(6x) = e^{i(6x)} = \left(e^{ix}\right)^6 = (\cos x + i\sin x)^6 = \cos^6 x + 6i\cos^5 x \sin x - 15\cos^4 x \sin^2 - 20i\cos^3 x \sin^3 x + 15\cos^2 x \sin^4 x + 6i\cos x \sin^5 x - \sin^6 x$. Kun erotetaan reaali- ja imaginaariosat, saadaan $\cos(6x) = \cos^6 x - 15\cos^4 x \sin^2 + 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$ ja $\sin(6x) = 6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x$.

36. Koska $e^{ik} = \cos k + i\sin k$, $\sum \sin k$ on summan $\sum e^{ik}$ imaginaariosa. Jälkimmäinen summa on geometrinen summa, jonka suhdeluku on e^i, ja se voidaan määrittää suoraan geometrisen summan kaavasta:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{ik} &= \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} = \frac{1 - \cos(n+1) - i\sin(n+1)}{1 - \cos 1 - i\sin 1} \\ &= \frac{(1 - \cos(n+1) - i\sin(n+1))(1 - \cos 1 + i\sin 1)}{(1 - \cos 1)^2 + \sin^2 1}.\end{aligned}$$

Edellisen lausekkeen imaginaariosa on

$$\frac{\sin 1(1 - \cos(n+1)) - (1 - \cos 1)\sin(n+1)}{1 - 2\cos 1 + \cos^2 1 + \sin^2 1} = \frac{\sin 1 + \sin n - \sin(n+1)}{2(1 - \cos 1)}.$$

Viimeiseen muotoon on päästy käyttämällä kahden kulman erotuksen sinin tuttua kaavaa.

37. Koska $5 = 2^2 + 1 = 2^2 - i^2 = (2+i)(2-i)$, 5 ei ole kompleksinen alkuluku. Jos $3 = (a+ib)(c+id)$, niin $|a| \le |a+ib| \le 3$, $c^2 + d^2 = |c+id|^2 \le 9$, $ac - bd = 3$, $ad + bc = 0$. Kerrotaan kahdesta viimeisestä yhtälöstä edellinen c:llä ja jälkimmäinen d:llä ja lasketaan yhtälöt yhteen. Saadaan $a(c^2+d^2) = 3c$. Nyt 3 on joko luvun a tai luvun c^2+d^2 tekijä. Jos 3 on a:n tekijä, $|a| = 3$ ja $c^2 + d^2 = |c|$. Jälkimmäinen yhtälö voi toteutua vain, jos $d = 0$ ja $|c| = 1$, $b = 0$. Jos taas 3 on luvun $c^2 + d^2$ tekijä, $c^2 + d^2$ on joko 3, 6 ta 9. Mikään näistä ei kuitenkaan ole kahden neliöluvun summa. 3 on siis kompleksinen alkuluku. Samoin, jos $7 = (a+ib)(c+id)$, niin $ac - bd = 7$ ja $bc - ad = 0$, $a(c^2+d^2) = 7c$ ja joko 7 on a:n tekijä, jolloin $|a| = 7$, $c^2 + d^2 = |c|$ ja $d = 0$, $|c| = 1$; viimein $b = 0$. Esimerkiksi tarkastamalla taulukkoa, jossa ovat lausekkeen $x^2 + y^2$ arvot, kun $1 \le x \le 7$ ja $1 \le y \le 7$ nähdään, että 7 voi olla luvun $c^2 + d^2 \le 7^2$ tekijä vain, jos $c = 7$ ja $d = 0$. Jos $d = 0$, on myös $b = 0$. 7 on siis kompleksinen alkuluku.

38. Tarkastetaan inversiota origokeskisessä yksikköympyrässä. Kuvaus on silloin $w = T(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$. Olkoon suoran yhtälö $az + \overline{az} + c = 0$. Suora kulkee origon kautta, jos ja vain jos $c = 0$. Nyt $z = \dfrac{1}{\overline{w}}$ ja $\overline{z} = \dfrac{1}{w}$. Suoran kuva w-tasossa toteuttaa siis yhtälön

$$\frac{a}{\overline{w}} + \frac{\overline{a}}{w} + c = 0$$

eli $cw\overline{w} + aw + \overline{aw} = 0$. Jos $c \neq 0$, tämä on origon kautta kulkevan ympyrän yhtälö, jos $c = 0$, kyseessä on origon kautta kulkeva suora. Vastaavasti ympyrän yhtälö $z\overline{z} + az + \overline{az} + c = 0$ muuttuu yhtälöksi $1 + aw + \overline{aw} + cw\overline{w} = 0$; jos $c = 0$ eli jos lähtöympyrä kulkee origon kautta, kuva on origon kautta suora, joka ei kulje origon kautta, mutta jos $c \neq 0$, kuva on w-tason ympyrä.

39. Olkoon pisteiden z_1, z_2 ja z_3 muodostama kolmio tasasivuinen ja olkoon z_0 sen keskipiste. Oletetaan että z_1, z_2 ja z_3 ovat z_0:sta katsoen positiivisessa kiertosuunnassa ja että $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3}$. Silloin $\angle z_1 z_0 z_2 = \angle z_2 z_0 z_3 = \angle z_3 z_0 z_1 = \dfrac{2\pi}{3}$, mistä seuraa, että $z_2 - z_0 = \varepsilon(z_1 - z_0)$ ja $z_3 - z_0 = \varepsilon^2(z_1 - z_0)$. Koska $\varepsilon^3 - 1 = 0$ ja $\varepsilon \neq 1$, niin $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Siis $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) z_0 = z_1 - z_0 + \varepsilon(z_2 - z_0) + \varepsilon^2(z_3 - z_0) = (z_1 - z_0)(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4) = (z_1 - z_0)(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon) = 0$.

Oletetaan sitten, että $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$ ja että $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$. Silloin $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) z_2$. Tästä seuraa $z_1 - z_2 = \varepsilon^2(z_2 - z_3)$, joten $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$. Samoin $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) z_3$, josta $z_1 - z_3 = \varepsilon(z_3 - z_2)$ ja $|z_1 - z_3| = |z_3 - z_2|$. Kolmion $z_1 z_2 z_3$ kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, joten kolmio on tasasivuinen.

40. Tulkitaan tehtävässä nimetyt pisteet kompleksiluvuiksi. Olkoon ε sama kuin edellisessä ratkaisussa. Edellisen tehtävän perusteella $M = -\varepsilon B - \varepsilon^2 A$, $N = -\varepsilon C - \varepsilon^2 B$, $P = -\varepsilon D - \varepsilon^2 C$ ja $Q = -\varepsilon A - \varepsilon^2 D$. Siis

$$M + N + P + Q = -(\varepsilon + \varepsilon^2)(A + B + C + D) = A + B + C + D. \tag{1}$$

Nelikulmion $ABCD$ painopiste on $\dfrac{1}{4}(A+B+C+D)$. Tehtävässä lueteltujen neljän kolmion painopisteet kärkinä muodostetun nelikulmion painopiste on

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}(A + B + M) + \frac{1}{3}(B + C + N) + \frac{1}{3}(C + D + P) + \frac{1}{3}(D + A + Q)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(A + B + C + D) + \frac{1}{3}(M + N + P + Q)\right) = \frac{1}{4}(A + B + C + D).
\end{aligned}$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa nojauduttiin yhtälöön (1).

41. Olkoot kolmion kärjet kompleksiluvut a, b ja c ja olkoon $\varepsilon \neq 1$ ehdon $\varepsilon^3 = 1$ toteuttava kompleksiluku. Tehtävän 39 perusteella tehtävän kolmen tasasivuisen kolmioin kärjet ovat b, a, $-\varepsilon b - \varepsilon^2 a$; c, b, $-\varepsilon c - \varepsilon^2 b$ ja a, c, $-\varepsilon a - \varepsilon^2 c$ ja näiden kolmioiden painopisteet $\dfrac{1}{3}(a + b - \varepsilon b - \varepsilon^2 a)$, $\dfrac{1}{3}(b + c - \varepsilon c - \varepsilon^2 b)$ ja $\dfrac{1}{3}(c + a - \varepsilon a - \varepsilon^2 c)$. Kun lasketaan yhteen näistä ensimmäinen, toinen luvulla ε kerrottuna ja kolmas luvulla ε^2 kerrottuna, saadaan $\dfrac{1}{3}((-\varepsilon^2 + 1 - \varepsilon^3 + \varepsilon^2)a + (-\varepsilon + 1 - \varepsilon^3 + \varepsilon)b + (-\varepsilon^2 + \varepsilon - \varepsilon^4 + \varepsilon^2)c)$. Kun otetaan huomioon, että $\varepsilon^3 = 1$ ja $\varepsilon^4 = \varepsilon$, nähdään, että edellinen lauseke on 0. Tehtävän 39 perusteella painopisteet ovat siis tasasivuisen kolmion kärjet.

42. Yhtälön $z^5 = 1$ ratkaisut ovat $z_k = e^{\frac{2\pi ki}{5}} = \cos\dfrac{2\pi k}{5} + i\sin\dfrac{2\pi k}{5}$, $k = 0, 1, \ldots, 4$. Pisteet ovat yksikköympyrään piirretyn säännöllisen viisikulmion kärjet. Viisikulmio voidaan konstruoida (harpilla ja viivoittimella), jos jokin kärjistä $z_k \neq 1$ voidaan konstruoida. Koska $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$, muut kärjet kuin $z = 1$ ovat yhtälön $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ ratkaisuja. Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$$

kanssa. Merkitään

$$w = z + \frac{1}{z}. \tag{1}$$

Silloin $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = w^2 - 2$. Ratkaistava yhtälö voidaan siis kirjoittaa muotoon $w^2 + w - 1 = 0$. Tämän yhtälön (yksi) ratkaisu on $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$. Jana w voidaan helposti piirtää Pythagoraan lausetta hyväksi käyttäen. Ratkaistaan vielä z yhtälöstä (1). Yksi ratkaisu on $z = \dfrac{1}{2}(w + i\sqrt{4 - w^2})$. Kun w on tunnettu jana, niin $\sqrt{4 - w^2}$ on jälleen piirrettävissä Pythagoraan lausetta hyödyntäen.

43. Kolmion ABC ala on numeron 15 perusteella $\dfrac{1}{2}|\operatorname{Im}(A - C)(\overline{B} - \overline{C})|$. Samalla tavoin laskettuna kolmioiden ABP, BCP ja CAP painopisteiden muodostaman kolmion ala on luvun $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}(B + C + P) - \dfrac{1}{3}(A + B + P)\right)\left(\dfrac{1}{3}(\overline{C} + \overline{A} + \overline{P}) - \dfrac{1}{3}(\overline{A} + \overline{B} + \overline{P})\right) = \dfrac{1}{18}(C - A)(\overline{C} - \overline{B})$ imaginaariosan itseisarvo.

44.

45. Ei merkitse olennaista rajoitusta valita kolmion kärkipisteiksi $B = 0$, $C = 1$ ja $A = a + bi$, $b \neq 0$. Otetaan sivun BC piste $X = t$ ja sivun AB piste $Z = u(a + ib)$, $0 < t < 1$, $0 < u < 1$. Määritetään AX:n ja CZ:n leikkauspiste. Leikkauspisteessä toteutuu yhtälö $1 - p + p(u(a + ib)) = (1 - q)t + q(a + ib)$ joillain reaaliluvuilla p ja q. Yhtälön imaginaariosista saadaan $pub = qb$; kun $q = up$ sijoitetaan yhtälön reaaliosaan, saadaan $1 - p + pua = (1 - up)t + upa$, josta ratkaistaan

$$p = \frac{t-1}{ut-1}, \quad 1 - p = \frac{ut-t}{ut-1}.$$

Leikkauspiste P on siis

$$\frac{1}{ut-1}(ut - t + uat - ua + i(t-1)ub).$$

Haetaan suoran BP ja sivun BA leikkauspiste. Leikkauspisteessä pätee reaalisilla l ja k yhtälö

$$\frac{l}{ut-1}(ut - t + uat - ua + i(t-1)ub) = (1-k) + k(a+ib).$$

Imaginaariosista ratkaistaan $(t-1)ubl = kb$ eli

$$l = \frac{k}{u(t-1)}.$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälön reaaliosiin, saadaan

$$k = \frac{u(t-1)}{2ut - u - t}.$$

Saadaan helposti

$$\frac{k}{1-k} = \frac{u(t-1)}{t(u-1)}.$$

Nyt

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{t}{1-t} \cdot \frac{k}{1-k} \cdot \frac{1-u}{u} = \frac{t \cdot u(t-1) \cdot (1-u)}{(1-t) \cdot t(u-1) \cdot u} = 1.$$