Lukuteoria-aiheisia kilpailuhenkisiä tehtäviä

1. Tutkimusretkellä 11 suomalaista ja n ruotsalaista tutkijaa poimivat eksoottisia sieniä. Yhteensä he poimivat $n^2 + 9n - 2$ sientä, ja he kaikki poimivat saman verran sieniä. Oliko tutkimusretkellä enemmän suomalaisia vai ruotsalaisia?

2. Olkoot $n \in \mathbb{Z}_+$ kappaletta kokonaislukuja sellaisia, että kun mitkä tahansa $n - 1$ niistä kerrotaan keskenään, saadun tulon ja jäljelle jäävän luvun erotus on jaollinen luvulla n. Osoita, että lukujen neliöiden summa on jaollinen luvulla n.

3. Olkoot a, b, c ja d kokonaislukuja, joille $ad - bc > 1$. Osoita, että ainakin yksi luvuista a, b, c ja d ei ole jaollinen luvulla $ad - bc$.

4. Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että luvut $12n + 5$ ja $9n + 4$ ovat yhteistekijättömiä.

5. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja, ja olkoon m pariton. Osoita, että luvut $2^m - 1$ ja $2^n + 1$ ovat yhteistekijättömiä.

6. Olkoot m, n ja k positiivisia kokonaislukuja siten, että lukujen $m + k$ ja m pienin yhteinen jaettava on yhtä suuri kuin lukujen $n + k$ ja n pienin yhteinen jaettava. Osoita, että on oltava $m = n$.

7. Osoita, että on olemassa äärettömän monta paritonta lukua m, joille luku $8^m + 9m^2$ on yhdistetty luku.

8. Olkoot a, b, c ja d kokonaislukuja, joille $a > b > c > d > 0$ ja

$$a^2 + ac - c^2 = b^2 + bd - d^2.$$

Osoita, että luku $ab + cd$ ei voi olle alkuluku.

9. Olkoot positiivisten kokonaislukujen a, b ja c suurin yhteinen tekijä 1, ja oletetaan, että $a \neq b$ ja

$$\frac{ab}{a-b} = c.$$

Osoita, että $a - b$ on neliöluku.

10. Todista, ettei neljän peräkkäisen posiitivisen kokonaisluvun tulo voi olla neliöluku.

11. Etsi kaikki kokonaisluvut, jotka voi esittää kahden neliöluvun erotuksena.

12. Etsi kaikki yhtälöparin

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3, \end{cases}$$

kokonaislukuratkaisut.

13. Olkoot m ja n yhteistekijättömiä positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että m jakaa binomikertoimen $\binom{m+n-1}{n}$.

14. Osoita, että positiivinen kokonaisluku $n > 1$ voidaan kirjoittaa (vähintään kahden) peräkkäisten positiivisten kokonaislukujen summana jos ja vain jos n ei ole luvun kaksi potenssi.

15. Osoita, että jokainen positiivinen kokonaisluku n voidaan kirjoittaa muodossa $a - b$, missä a ja b ovat sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että niillä kummallakin on yhtä suuri määrä erilaisia alkulukutekijöitä.

16. Osoita, että yhtälöllä $x! \cdot y! = z!$ on äärettömän monta ratkaisua, missä x, y ja z ovat positiivisia kokonaislukuja ja $x < y < z$.

17. Osoita, että jokaisella kokonaisluvulla $n \geqslant 2$ on olemassa n eri positiivista kokonaislukua $a_1, a_2, \ldots, a_n$ joille $(a_i - a_j) \mid (a_i + a_j)$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, joilla $i \neq j$.

18. Etsi kaikki posiitiviset kokonaisluvut n, joille mikä tahansa n-numeroinen luku, jossa 1 esiintyy $n - 1$ kertaa ja 7 yhden kerran, on alkuluku.

19. Olkoot a, m ja p kokonaislukuja siten, että $a \geqslant 2$, $m \geqslant 1$ ja, että p on alkuluku. Oletetaan, että sekä $a^m \equiv 1 \pmod p$ että $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Osoita, että $a^m \equiv 1 \pmod{p^2}$.

20. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Osoita, että Fibonaccin lukujen jonossa $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ ensimmäisten m^2 luvun joukossa jokin on jaollinen luvulla m.

21. Olkoon p pariton alkuluku ja $p > 3$, ja olkoon $n = (2^{2p} - 1)/3$. Osoita, että $2^{n-1} \equiv 1 \pmod n$.

22. Olkoon x positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa x peräkkäistä kokonaislukua, joista mikään ei ole alkuluvun potenssi.

23. Olkoon k ei-negatiivinen kokonaisluku. Osoita, että luvun $2^{2^k} + 1$ jokainen tekijä on $\equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$.

24. Osoita, että millä tahansa positiivisella kokonaisluvulla k löytyy positiivinen kokonaisluku n, jolle $2^k \mid (3^n + 5)$.

25. Osoita, ettei Diofantoksen yhtälöllä

$$x^2 + 3xy - 2y^2 = 122$$

ole kokonaislukuratkaisuita.

26. Etsi kaikki posiitiviset kokonaisluvut m ja n, joille $|12^m - 5^n| = 7$.

27. Etsi kaikki alkuluvut p, joille $2^p + 3^p$ on kokonaisluvun potenssi.

28. Osoita, että Diofantoksen yhtälön

$$5^x - 3^y = 2$$

ainoa kokonaislukuratkaisu on $x = y = 1$.

29. Olkoon a kokonaisluku, jolle $a \geqslant 3$. Todista, että on olemassa äärettömän monta posiitivista kokonaislukua n, joille $a^n \equiv 1 \pmod n$.

30. Olkoot $n_1, \ldots, n_k$ positiivisia kokonaislukuja, joille

$$n_1 \mid (2^{n_2} - 1), \quad n_2 \mid (2^{n_3} - 1), \quad \ldots, \quad n_k \mid (2^{n_1} - 1).$$

Osoita, että $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$.

31. Olkoot a ja b kokonaislukuja, joille $a^2 b \mid (a^3 + b^3)$. Osoita, että $a = b$.

Vihjeitä lukuteoria-aiheisiin kilpailuhenkisiin tehtäviin

Vihje 1. Sienestäjien lukumäärä jakaa kerättyjen sienien lukumäärän. Toisaalta, molemmat lukumäärät ovat polynomeja, ja kun suoritetaan polynomien jakolasku, sienestäjien lukumäärän on jaettava jakojäännös.

Vihje 2. Tässä on hyvä tarkastella lukuja modulo n, jolloin osoittautuu, että kaikki neliöt ovat keskenään kongruentteja.

Vihje 3. Mitä tapahtuu, jos tekee vastaoletuksen, että $D = ad - bc$ jakaa jokaisen luvuista a, b, c ja d, ja sitten tarkastelee lausekkeen $ad - bc$ jaollisuutta luvulla D?

Vihje 4. Kokonaisluvut a ja b ovat varmasti yhteistekijättömiä, jos $ax + by = 1$ joillakin kokonaisluvuilla x ja y.

Vihje 5. Oleta, että luvuilla on jokin yhteinen alkulukutekijä p. Mitä kyseiset luvun 2 potenssit ovat silloin modulo p? Mitä voit silloin päätellä niiden eksponenteista?

Vihje 6. Tässä on hyödyllistä muistaa, että $(a, b)[a, b] = ab$. Mitä tapahtuisi, jos tietäisit, että $(m, k) = (n, k)$? Oleta sitten vaikkapa, että jollakin alkuluvulla p ja jollakin $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ pätee $p^\alpha \mid (m, k)$ mutta $p^\alpha \nmid (n, k)$. Nyt voit yrittää esim. päätellä, että yhteistekijättömillä luvuilla $(m + k)/(m, k)$ ja $m/(m, k)$ olisi yhteinen tekijä p.

Vihje 7. Voitko valita luvun m äärettömän monella eri tavalla niin, että lausekkeen $8^m + 9m^2$ molemmat termit ovat kuutiolukuja?

Vihje 8. Oleta, että $p = ab + cd$ on alkuluku, ja eliminoi sitten luvun p avulla a tehtävänannon yhtälöstä, jolloin jäljelle pitäisi jäädä

$$p\,(p - 2cd + bc) = \left(b^2 + c^2\right)\left(b^2 + bd - d^2\right),$$

ja nyt luvun p on jaettava ainakin toinen oikean puolen tekijöistä. Molempien vaihtoehtojen pitäisi johtaa jotenkin ristiriitaan.

Vihje 9. Osoittautuu, että $a - b = (a, b)^2$. Kirjoita $a = A \cdot (a, b)$ ja $b = B \cdot (a, b)$. Nyt yhtälöstä seuraa toisaalta, että $(a, b)^2 \mid (a - b)$ ja toisaalta, että $(A - B) \mid (a, b)$.

Vihje 10. Voit vaikkapa verrata neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tuloa $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ neliöön $(n^2 + 3n + 1)^2$.

Vihje 11. Tarkastele lukujen esitystä muodossa $(a+b)(a-b)$, ja tarkastele eri tilanteita sen mukaan, mitä luku on modulo 4.

Vihje 12. Eliminoi z jälkimmäisestä yhtälöstä. Silloin jäljelle jää yhtälö, jonka pitäisi sieventyä muotoon

$$(3 - x)(3x + 3y - xy - y^2) = 8.$$

Erityisesti, luku $3 - x$ on luvun 8 tekijä.

Vihje 13. Tunnetusti $\binom{m+n-1}{n} = \binom{m+n}{n} - \binom{m+n-1}{n-1}$. Mitä tästä seuraa, kun binomikertoimet kirjoittaa kertomien avulla?

Vihje 14. Oleta, että luku n voidaan kirjoittaa muodossa $m+(m+1)+\ldots+(m+k)$. Totea, että silloin myös $2n = (2m+k)(k+1)$, ja päättele tästä, että luvulla n on oltava pariton alkulukutekijä. Kirjoita sitten $n = 2^\alpha(2t + 1)$, ja käsittele erikseen tapaukset $t \geqslant 2^\alpha$ ja $t < 2^\alpha$.

Vihje 15. Käsittele erikseen tapaukset, missä n on parillinen ja missä n on pariton. Edellinen osoittautuu helpommaksi. Jälkimmäisessä tarkastele pienintä paritonta alkulukua p, joka ei jaa lukua n, ja kirjoita $n = pn - (p - 1)n$.

Vihje 16. Löydätkö yhtälölle ratkaisun, jos vaikkapa $z = n!$ jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$?

Vihje 17. Luvut voi konstruoida induktiolla. Tapaus $n = 2$ on helppo. Jos taas $a_1, \ldots,$ a_n ovat halutunlaiset luvut jossakin tapauksessa, ota lukujen a_i ja erotusten $a_i - a_j$, missä i ja j käyvät läpi kaikki luvut $1, \ldots, n$ ja $i \neq j$, pienin yhteinen jaettava L. Millainen on silloin lukujoukko L, $a_1 + L, \ldots, a_n + L$?

Vihje 18. Halutunlaiset luvut ovat $n = 1$ ja $n = 2$. Käsittele tapaus $3 \mid n$ erikseen. Oleta sitten, että $3 \nmid n$. Tarkastele eri tapauksia n modulo 6, ja tarkastele itse alkulukuja modulo 7. Näistä tarkasteluista voi päätellä, että on oltava $n \leqslant 5$.

Vihje 19. Totea, että $a^{(p-1)m} \equiv 1 \pmod{p^2}$, ja totea esim. binomikaavalla, että myös $a^{pm} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

Vihje 20. Tarkastele jonoa modulo m, totea, että kaksi peräkkäistä arvoa määräävät kaikki seuraavat arvot, ja että jonon täytyy olla jaksollinen modulo m. Kuinka pitkä jakso voisi olla?

Vihje 21. Totea, että $2^{2p} \equiv 1 \pmod{n}$, jolloin riittää osoittaa, että $2p \mid (n-1)$.

Vihje 22. Olkoot $p_1 < p_2 < \ldots < p_{2x}$ alkulukuja. Kiinalaisella jäännöslauseella voi konstruoida luvun n, jolla luvulla $n+1$ on ainakin jotkin tietyt alkulukutekijät p_1 ja p_2, luvulla $n+2$ on ainakin tietyt alkulukutekijät p_3 ja p_4, ja niin edelleen aina lukuun $n + x$ saakka.

Vihje 23. Riittää todistaa väite alkulukutekijöille $p \mid (2^{2^k} + 1)$. Totea, että $2^{2^k} \equiv -1 \pmod{p}$, ja että $2^{2^{k+1}} \equiv 1 \pmod{p}$, ja päättele tästä, että pienimmän $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, jolle $2^\alpha \equiv 1 \pmod{p}$, täytyy olla luvun kaksi potenssi, ja edelleen, että itse asiassa on oltava $\alpha = 2^{k+1}$.

Vihje 24. Väitteen voi todistaa induktiolla eksponentin k suhteen. Tapaukset $k \in \{1, 2, 3\}$ ovat helppoja. Kun $k \geqslant 3$, voi olettaa, että jollakin n pätee $3^n + 5 = 2^k A$, missä $A \in \mathbb{Z}_+$. Käsittele ensin parillisen luvun A tapaus. Oleta sitten, että A on pariton, ja tarkastele lukua $3^{n+\alpha} + 5$ modulo 2^{k+1}. Osoittautuu, että tehtävä palautuu siihen, löytyykö eksponenttia $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, jolle pätee $3^\alpha \equiv 2^k + 1 \pmod{2^{k+1}}$.

Vihje 25. Jos yhtälön kertoo puolittain luvulla neljä, niin siitä voi erottaa neliön $(2x + 3y)^2$. Nyt yhtälöä voi esimerkiksi tarkastella modulo 17.

Vihje 26. Tarkastele yhtälöä ensin modulo 4, ja totea, että $12^m - 5^n \neq -7$. Siirry sitten tarkastelemaan yhtälöa $12^m - 5^n = 7$, ja totea, että $m = n = 1$ on ratkaisu. Oleta sitten, että $m > 1$, tarkastele yhtälöä modulo 3, ja totea, että n on pariton, ja tarkastele yhtälöä lopuksi modulo 8.

Vihje 27. Tapaukset, missä $p \leqslant 5$ on helppo käydä läpi. Oletetaan siis, että $p > 5$. Osoita, että $2^p + 3^p$ on jaollinen luvulla 5, mutta ei luvulla 5^2 esim. kirjoittamalla $3 = 5 - 2$.

Vihje 28. Oleta, että $y > 1$. Tarkastele yhtälöä modulo 4, ja totea, että luvun y on oltava pariton. Tarkastele yhtälöä sitten modulo 9, ja totea, että $x \equiv 5 \pmod{6}$. Lopuksi, tarkastele yhtälöä modulo 7.

Vihje 29. Tarkastele jotakin luvun $a - 1$ alkulukutekijää p, jolloin $a^p \equiv a \equiv 1 \pmod{p}$. Mitä voit nyt sanoa potensseista $a^{p^2}, a^{p^3}, \ldots$?

Vihje 30. Olkoon D lukujen $n_1, \ldots, n_k$ pienin yhteinen jaettava. Päättele, että $2^D \equiv 1 \pmod{n_i}$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$, jolloin myös $2^D \equiv 1 \pmod{D}$. Osoita lopuksi, että tästä seuraa, että $D = 1$ (esim. tarkastelemalla luvun D jotakin paritonta alkulukutekijää p).

Vihje 31. Todista, että $x = a/b$ ratkaisee yhtälön $x^3 - mx^2 + 1 = 0$ jollakin $m \in \mathbb{Z}_+$, ja tarkastele sitten tämän yhtälön rationaalisia juuria.