# Tehtäviä epäyhtälöistä

## Tehtäviä neliöiden ei-negatiivisuudesta

**1.** Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että $4a^2 \geqslant 4a - 1$.

**Ratkaisu.** $4a^2 \geqslant 4a - 1 \iff (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 1 + 1^2 \geqslant 0 \iff (2a - 1)^2 \geqslant 0$.

**2.** Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$. Osoita, että $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

**Ratkaisu.** Kerrotaan molemmat puolet kahdella:

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca \\
\iff &2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geqslant 2ab + 2bc + 2ca \\
\iff &a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geqslant 0 \\
\iff &(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

**3.** Osoita, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on $\cos^4 x + \sin^4 x \geqslant \frac{1}{2}$.

**Ratkaisu.** $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{1}{2}\left(\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos^2 2x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

**4.** Olkoot $a$, $b$, $c$ ja $d$ reaalilukuja. Osoita, että

$$ab + cd \leqslant \sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2}.$$

Milloin tässä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

**Ratkaisu.** Jos $ab + cd < 0$, niin triviaalisti $ab + cd < \sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2}$. Oletetaan siis, että $ab + cd \geqslant 0$. Tällöin voidaan päätellä:

$$\begin{aligned}
&ab + cd \leqslant \sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2} \\
\iff &(ab + cd)^2 \leqslant (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \\
\iff &a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd \leqslant a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2 \\
\iff &2abcd \leqslant a^2d^2 + c^2b^2 \\
\iff &0 \leqslant (ad - bc)^2.
\end{aligned}$$

Haluttu epäyhtälö on todistettu oikeaksi. Yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin kun $ab + cd \geqslant 0$ ja $ad = bc$.

**5.** Olkoot $a$, $b$, $c$ ja $d$ reaalilukuja. Osoita, että pienin luvuista

$$a - b^2, b - c^2, c - d^2 \text{ ja } d - a^2$$

on pienempi tai yhtä suuri kuin $\frac{1}{4}$.

**Ratkaisu.** Tehdään se vastaoletus, että kyseiset luvut olisivat kaikki suurempia kuin $\frac{1}{4}$. Tällöin olisi

$$a - b^2 + b - c^2 + c - d^2 + d - a^2 > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

eli

$$\begin{aligned}
0 &> a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} + c^2 - c + \frac{1}{4} + d^2 - d + \frac{1}{4} \\
&= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

mikä on ristiriita, sillä reaalilukujen neliöiden summa ei koskaan voi olla negatiivinen.

**6.** Etsi kaikki ne reaalilukuviisikot $\langle x, y, u, v, w\rangle$, joille

$$\begin{cases} y^2+u^2+v^2+w^2=4x-1,\\ x^2+u^2+v^2+w^2=4y-1,\\ x^2+y^2+v^2+w^2=4u-1,\\ x^2+y^2+u^2+w^2=4v-1,\\ x^2+y^2+u^2+v^2=4w-1.\end{cases}$$

**Ratkaisu.** Laskemalla puolittain yhteen nämä yhtälöt nähdään, että halutunlaiset reaalilukuviisikot toteuttavat yhtälön

$$4x^2+4y^2+4u^2+4v^2+4w^2=4x+4y+4u+4v+4w-1-1-1-1-1,$$

eli on oltava

$$4x^2-4x+1+4y^2-4y+1+4u^2-4u+1+4v^2-4v+1+4w^2-4w+1=0,$$

tai yhtäpitävästi $(2x-1)^2+(2y-1)^2+(2u-1)^2+(2v-1)^2+(2w-1)^2=0$, eli

$$x=y=u=v=w=\frac{1}{2}.$$

Tämä reaalilukuviisikko on siis ainoa mahdollinen ratkaisu. Toisaalta se selvästi on ratkaisu, sillä $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=1=4\cdot\frac{1}{2}-1$.

**7.** Määritä yhtälön $x^8-x^7+2x^6-2x^5+3x^4-3x^3+4x^2-4x+\frac{5}{2}=0$ reaalisten juurien lukumäärä.

**Ratkaisu.** Kun $x\geqslant 1$ tai $x\leqslant 0$, on varmasti

$$x^8-x^7+2x^6-2x^5+3x^4-3x^3+4x^2-4x+\frac{5}{2}\geqslant 0+0+0+0+\frac{5}{2}>0,$$

eli mahdolliset ratkaisut löytyvät väliltä $]0,1[$. Olkoon $x\in\,]0,1[$. Tällöin varmasti $x^6+2x^4+3x^2+4<10$ ja $0>x^2-x\geqslant-\frac{1}{4}$, eli

$$x^8-x^7+2x^6-2x^5+3x^4-3x^3+4x^2-4x=(x^6+2x^4+3x^2+4)(x^2-x)>10\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{2},$$

eli ratkaisuita ei löydy myöskään väliltä $]0,1[$. Siis tarkasteltavalla yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuita.

## Tehtäviä aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä

**8.** Olkoon $a\in\mathbb{R}_+$. Osoita, että $a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant 2$. Milloin tässä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

**Ratkaisu.** Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$a^2+\frac{1}{a^2}=2\cdot\frac{a^2+\frac{1}{a^2}}{2}\geqslant 2\cdot\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=2,$$

missä yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin, kun $a^2=\dfrac{1}{a^2}$, eli kun $a=1$.

**9.** Olkoot $a$ ja $b$ ei-negatiivisia reaalilukuja. Osoita, että $a+4b\geqslant 4\sqrt{ab}$.

**Ratkaisu.** Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$a+4b\geqslant 2\cdot\sqrt{a\cdot 4b}=4\sqrt{ab}.$$

**10.** Olkoot $a,b\in\mathbb{R}_+$. Osoita, että $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 4$.

**Ratkaisu.** Käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä kumpaankin multiplikandiin erikseen, saadaan

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 2\sqrt{a\cdot b}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} = 4.$$

**11.** Osoita, että jos $\alpha$ on terävä kulma, niin

$$\tan\alpha + \cot\alpha \geqslant 2.$$

**Ratkaisu.** Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö antaa suoraan

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \geqslant 2\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = 2.$$

**12.** Osoita, että jos $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, niin

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

**Ratkaisu.** Käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä jokaiseen todistettavan epäyhtälön vasemman puolen multiplikandiin erikseen saadaan

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca} = 8abc.$$

**13.** Osoita, että jokaisella kokonaisluvulla $n > 1$ on

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1) < n^n.$$

**Ratkaisu.** Suoraan aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1) < \left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n}\right)^n = n^n.$$

Tässä yhtäsuuruus ei voi päteä, sillä ei voi olla $1 = 3 = 5 = \ldots = 2n-1$.

**14.** Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $\sqrt[3]{xyz} \geqslant \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$.

**Ratkaisu.** Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}} = \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Haluttu tulos saadaan korottamalla tässä epäyhtälön molemmat puolet potenssiin $-1$.

**15.** Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

**Ratkaisu.** Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geqslant \sqrt{\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}} = \sqrt[3]{abc}.$$

**16.** Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että $\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a+nb}{n+1}$.

**Ratkaisu.** Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\frac{a+nb}{n+1} = \frac{a+b+b+\ldots+b}{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{a\cdot b\cdot b\cdots b} = \sqrt[n+1]{ab^n}.$$

**17.** Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{9}{2(a+b+c)} \leqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

**Ratkaisu.** Suoraan aritmeettis-harmonisen epäyhtälön nojalla

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

**18.** Pisteet $M$ ja $N$ sijaitsevat kolmion $\triangle ABC$ sivulla $BC$ siten, että $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$. Osoita, että

$$\frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NC} \geqslant 2\frac{AB}{AC}.$$

**Ratkaisu.** Käytetään aluksi aritmeettis-geometrista ja sitten erilaisia geometrisia identiteettejä:

$$\begin{aligned}
\frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NC} &\geqslant 2\sqrt{\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NB}{NC}} = 2\sqrt{\frac{|\triangle AMB|}{|\triangle AMC|} \cdot \frac{|\triangle ANB|}{|\triangle ANC|}} \\
&= 2\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot AB \cdot \sin \widehat{BAM} \cdot \frac{1}{2} \cdot AN \cdot AB \cdot \sin\left(\widehat{BAM} + \widehat{MAN}\right)}{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot AC \cdot \sin\left(\widehat{MAN} + \widehat{CAN}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot AN \cdot AC \cdot \sin \widehat{CAN}}} \\
&= 2\sqrt{\frac{AB^2}{AC^2}} = 2\frac{AB}{AC},
\end{aligned}$$

missä $|\triangle XYZ|$ tarkoittaa kolmion $\triangle XYZ$ pinta-alaa.

**19.** a) Etsi rationaalilukukertoiminen kolmen muuttujan $x$, $y$ ja $z$ polynomi $Q(x, y, z)$, jolle

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)Q(x, y, z).$$

b) Osoita, että jos $a$, $b$ ja $c$ ovat positiivisia reaalilukuja, niin

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Milloin tässä epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus?

**Ratkaisu.** a) Polynomi $Q(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = \frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)$ kelpaa:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) &= x^3+xy^2+xz^2-x^2y-xyz-x^2z+x^2y+y^3 \\
&\quad +yz^2-xy^2-y^2z-xyz+x^2z+y^2z+z^3-xyz-yz^2-xz^2 = x^3+y^3+z^3-3xyz.
\end{aligned}$$

b) Koska $a > 0$, $b > 0$ ja $c > 0$, on $\sqrt[3]{a} > 0$, $\sqrt[3]{b} > 0$ ja $\sqrt[3]{c} > 0$. Siispä sijoittamalla a)-kohdassa saatuun yhtälöön $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$ ja $z = \sqrt[3]{c}$, saadaan:

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc} = x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z) \cdot \frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right) \geqslant 0.$$

Koska $x+y+z > 0$, esiintyy yhtäsuuruus täsmälleen silloin kun lukujen $x-y$, $y-z$ ja $z-x$ neliöt häviävät, eli kun $x = y = z$. Siis

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

missä yhtäsuuruus esiintyy vain kun $a = b = c$.

**20.** Olkoot $a, b \in \mathbb{R}_+$ sellaisia, että $a + b = 1$. Osoita, että

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

**Ratkaisu.** Koska mielivaltaisille positiivisille reaaliluvuille $x$ ja $y$ on $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, on oltava myös $2(x^2 + y^2) \geqslant x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$, eli

$$x^2 + y^2 \geqslant \frac{(x+y)^2}{2}.$$

Sijoittamalla tähän $x = a + \frac{1}{a}$ ja $y = b + \frac{1}{b}$, saadaan

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + 1 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \geqslant \frac{(3+2)^2}{2} = \frac{25}{2}.$$

**21.** a) Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ sellaisia, että $a + b + c \geqslant 3$. Onko tällöin välttämättä

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant 3?$$

b) Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ sellaisia, että $a + b + c \leqslant 3$. Onko tällöin välttämättä

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 3?$$

**Ratkaisu.** a) Ei. Nimittäin jos vaikkapa $a = b = 2$ ja $c = \frac{1}{3}$, niin $a + b + c = 4\frac{1}{3} > 3$, mutta kuitenkin $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 = 4 > 3$.
b) Kyllä on. Nimittäin aritmeettis-harmonisesta epäyhtälöstä seuraa, että

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c} \geqslant \frac{9}{3} = 3.$$

**22.** Olkoot $a$, $b$ ja $c$ reaalilukuja, joille $a > b > c > 0$. Osoita, että

$$\frac{c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} + \frac{b}{c} \geqslant 5.$$

**Ratkaisu.** Pilkotaan todistettavan epäyhtälön vasemman puolen kaksi jälkimmäistä termiä osiin ja käytetään sopivasti aritmeettis-geometrista epäyhtälöä:

$$\frac{c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} + \frac{b}{c} = \frac{c}{a-b} + \frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{b-c} + \frac{b-c}{c} + \frac{c}{c}$$
$$= \frac{c}{a-b} + \frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{c} + 2 \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c}{a-b} \cdot \frac{a-b}{b-c} \cdot \frac{b-c}{c}} + 2 = 3 + 2 = 5.$$

**23.** Olkoon $n \geqslant 2$ kokonaisluku ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ei-negatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n.$$

**Ratkaisu.** Koska aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla jokaisella $b \in \mathbb{R}_+$ on oltava

$$\sqrt[n]{a_n b^{n-1}} \leqslant \frac{a_n + (n-1)b}{n},$$

on oltava myös

$$a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \left(\frac{a_n + (n-1) \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}}{n}\right)^n = \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n.$$

**24.** Olkoot $x$, $y$ ja $z$ sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $xyz = 32$. Mikä tällöin on lausekkeen $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$ pienin mahdollinen arvo?

**Ratkaisu.** Käyttämällä aritmeettis-geometrista epäyhtälöä saadaan alaraja

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 = x^2 + 2xy + 2xy + 4y^2 + z^2 + z^2 \geqslant 6\sqrt[6]{x^2 \cdot 2xy \cdot 2xy \cdot 4y^2 \cdot z^2 \cdot z^2}$$
$$= 6\sqrt[6]{16(xyz)^4} = 6\sqrt[6]{16 \cdot 32^4} = 6\sqrt[6]{2^24} = 6 \cdot 2^4 = 96.$$

Tässä alaraja voidaan saavuttaa vain silloin kun $x^2 = 2xy = 2xy = 4y^2 = z^2 = z^2$, eli kun $x = 2y = z$. Lisäehdon $xyz = 32$ nojalla kyseinen alaraja saavutetaan siis täsmälleen silloin kun $x = z = 4$ ja $y = 2$.

## Tehtäviä suuruusjärjestysepäyhtälöstä

**25.** Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että:
a) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a$.
b) $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab$.
c) $\dfrac{a+b+c}{abc} \leqslant \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

**Ratkaisu.** a) Olkoot luvut $a, b, c$ missä tahansa suuruusjärjestyksessä. Tällöin varmasti luvut $a^2, b^2, c^2$ ovat myös samassa suuruusjärjestyksessä. Siispä suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla

$$a^2b + b^2c + c^2a \leqslant a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c = a^3 + b^3 + c^3.$$

b) Missä tahansa suuruusjärjestyksessä luvut $a, b, c$ ikinä ovatkaan, ovat luvut $a^2, b^2, c^2$ ja toisaalta luvut $a^3, b^3, c^3$ samassa suuruusjärjestyksessä, ja luvut $bc, ca, ab$ taas vastakkaisessa suuruusjärjestyksessä. Nyt voidaan käyttää suuruusjärjestysepäyhtälöä kahdesti, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} a^2bc + b^2ca + c^2ab &\leqslant a^2 \cdot ab + b^2 \cdot bc + c^2 \cdot ca = a^3 \cdot b + b^3 \cdot c + c^3 \cdot a \\ &\leqslant a^3 \cdot a + b^3 \cdot b + c^3 \cdot c = a^4 + b^4 + c^4. \end{aligned}$$

c) Suoraan suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{a} \\ &\leqslant \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \end{aligned}$$

**26.** Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}}.$$

**Ratkaisu.** Suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla $a^2b + b^2c + c^2a$ ja $a^2c + b^2a + c^2b$ ovat aina enintään yhtä suuria kuin $a^3 + b^3 + c^3$. Siispä

$$\begin{aligned} (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) &= (a^3 + b^3 + c^3) + (a^2b + b^2c + c^2a) + (a^2c + b^2a + c^2b) \\ &\leqslant (a^3 + b^3 + c^3) + (a^3 + b^3 + c^3) + (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a^3 + b^3 + c^3). \end{aligned}$$

Haluttu tulos seuraa tästä jakamalla puolittain luvuilla $a^2 + b^2 + c^2$ ja 3.

Suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Siispä

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geqslant 3(ab + bc + ca).$$

Haluttu tulos saadaan tästä ottamalla puolittain neliöjuuret ja jakamalla puolittain luvulla 3.

**27.** Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$a + b + c \leqslant \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

**Ratkaisu.** Luvut $a^3, b^3, c^3$ ja $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ ovat aina samassa suuruusjärjestyksessä. Toisaalta luvut $a^2, b^2, c^2$ ja $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ovat aina vastakkaisissa suuruusjärjestyksissä. Käyttämällä suuruusjärjestysepäyhtälöä kahdesti saadaan, että

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geqslant \frac{a^3}{ab} + \frac{b^3}{bc} + \frac{c^3}{ca} = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} + \frac{c^2}{c} = a + b + c.$$

**28.** Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

**Ratkaisu.** Koska luvut $a^5, b^5, c^5$ ja $\frac{1}{b^3c^3}, \frac{1}{c^3a^3}, \frac{1}{a^3b^3}$ ovat aina samassa suuruusjärjestyksessä, ja koska luvut $a^2, b^2, c^2$ ja $\frac{1}{a^3}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{c^3}$ ovat aina vastakkaisissa suuruusjärjestyksissä, voidaan käyttää suuruusjärjestysepäyhtälöä kahdesti:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} = a^5 \cdot \frac{1}{b^3c^3} + b^5 \cdot \frac{1}{c^3a^3} + c^5 \cdot \frac{1}{a^3b^3} \\
\geqslant &a^5 \cdot \frac{1}{a^3b^3} + b^5 \cdot \frac{1}{b^3c^3} + c^5 \cdot \frac{1}{c^3a^3} \\
= &a^2 \cdot \frac{1}{b^3} + b^2 \cdot \frac{1}{c^3} + c^2 \cdot \frac{1}{a^3} \geqslant a^2 \cdot \frac{1}{a^3} + b^2 \cdot \frac{1}{b^3} + c^2 \cdot \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.
\end{aligned}$$

**29.** Olkoot $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pareittain erisuuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ on

$$\sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_\ell}{\ell^2} \geqslant \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}.$$

**Ratkaisu.** Olkoot $b_1, b_2, \ldots, b_n$ luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ järjestettynä kasvavaan järjestykseen, eli siten, että $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Koska luvut $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ovat positiivisia kokonaislukuja, on varmasti $b_1 \geqslant 1$, $b_2 \geqslant 2$, $\ldots$, $b_n \geqslant n$. Nyt suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla

$$\sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_\ell}{\ell^2} = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \cdot \frac{1}{\ell^2} \geqslant \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \cdot \frac{1}{\ell^2} \geqslant \sum_{\ell=1}^{n} \ell \cdot \frac{1}{\ell^2} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}.$$

**30.** *Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistaminen suuruusjärjestysepäyhtälöllä.*

a) Olkoot $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{c_1}{c_n} + \frac{c_2}{c_1} + \frac{c_3}{c_2} + \ldots + \frac{c_n}{c_{n-1}} \geqslant n.$$

b) Olkoot $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{y_1}{y_1y_2\cdots y_n} + y_2 + y_3 + \ldots + y_n \geqslant n.$$

c) Olkoot $\varrho, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Osoita:

$$\frac{\varrho x_1}{\varrho^n x_1x_2\cdots x_n} + \varrho x_2 + \varrho x_3 + \ldots + \varrho x_n \geqslant n.$$

d) Osoita lopuksi, että

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

**Ratkaisu.** a) Kun luvut $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ovat jossakin suuruusjärjestyksessä, ovat luvut $\frac{1}{c_1}$, $\frac{1}{c_2}$, ..., $\frac{1}{c_n}$ varmasti vastakkaisessa suuruusjärjestyksessä. Täten suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla

$$\frac{c_1}{c_n} + \frac{c_2}{c_1} + \ldots + \frac{c_n}{c_{n-1}} = c_1 \cdot \frac{1}{c_n} + c_2 \cdot \frac{1}{c_1} + \ldots + c_n \cdot \frac{1}{c_{n-1}} \geqslant c_1 \cdot \frac{1}{c_1} + c_2 \cdot \frac{1}{c_2} \ldots + c_n \cdot \frac{1}{c_n} = n.$$

b) Väite seuraa a)-kohdan epäyhtälöstä sijoituksilla

$$c_1 = y_1, c_2 = y_1y_2, c_3 = y_1y_2y_3, \ldots, c_n = y_1y_2\cdots y_n.$$

c) Väite seuraa b)-kohdan epäyhtälöstä sijoituksilla

$$y_1 = \varrho x_1, y_2 = \varrho x_2, \ldots, y_n = \varrho x_n.$$

d) Sijoittamalla c)-kohdan epäyhtälöön

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$$

saadaan

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} \geqslant n,$$

eli

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

## Tehtäviä Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä

**31.** Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$. a) Osoita, että

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.$$

b) Osoita, että $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.

**Ratkaisu.** a) Käytetään Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_k}}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 = n^2.$$

b) Käytetään jälleen Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= 1\cdot a_1 + 1\cdot a_2 + \ldots + 1\cdot a_n \\ &\leqslant \sqrt{1^2+1^2+\ldots+1^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} = \sqrt{n}\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}. \end{aligned}$$

**32.** Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$, niin $a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 \geqslant n$.

**Ratkaisu.** Käyttämällä kahdesti Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä kuten b)-kohdassa saadaan, että

$$a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 \geqslant \frac{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^2}{n} \geqslant \frac{\left(\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}\right)^2}{n} = \frac{\left(\frac{n^2}{n}\right)^2}{n} = \frac{n^2}{n} = n.$$

**33.** Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \sqrt{\sqrt[3]{a_1^2} + \sqrt[3]{a_2^2} + \ldots + \sqrt[3]{a_n^2}}\sqrt{\sqrt[3]{a_1^4} + \sqrt[3]{a_2^4} + \ldots + \sqrt[3]{a_n^4}}.$$

**Ratkaisu.** Riittää käyttää Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä vain kerran:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= \sqrt[3]{a_1}\cdot\sqrt[3]{a_1^2} + \sqrt[3]{a_2}\cdot\sqrt[3]{a_2^2} + \ldots + \sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a_n^2} \\ &\leqslant \sqrt{\sqrt[3]{a_1^2} + \sqrt[3]{a_2^2} + \ldots + \sqrt[3]{a_n^2}}\sqrt{\sqrt[3]{a_1^4} + \sqrt[3]{a_2^4} + \ldots + \sqrt[3]{a_n^4}}. \end{aligned}$$

**34.** Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

**Ratkaisu.** Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} &\geqslant \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\right)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}. \end{aligned}$$

**35.** Polynomin $P$ kertoimet ovat positiivisia reaalilukuja. Osoita, että kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla $a$ ja $b$ pätee $\sqrt{P(a)P(b)} \geqslant P\big(\sqrt{ab}\big)$.

**Ratkaisu.** Tämä seuraa suoraan Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä. Nimittäin, jos $P(x) = \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell x^\ell$, missä $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}_+$, niin

$$\begin{aligned} P\big(\sqrt{ab}\big) &= \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell(\sqrt{ab})^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \sqrt{c_\ell}\big(\sqrt{a}\big)^\ell \cdot \sqrt{c_\ell}\big(\sqrt{b}\big)^\ell \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{\ell=0}^{n}\left(\sqrt{c_\ell}\big(\sqrt{a}\big)^\ell\right)^2}\sqrt{\sum_{\ell=0}^{n}\left(\sqrt{c_\ell}\big(\sqrt{b}\big)^\ell\right)^2} = \sqrt{\sum_{\ell=0}^{n} c_\ell a^\ell}\sqrt{\sum_{\ell=0}^{n} c_\ell b^\ell} = \sqrt{P(a)}\sqrt{P(b)}. \end{aligned}$$

**36.** Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$, ja oletetaan, että $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$. Osoita, että tällöin

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}.$$

**Ratkaisu.** Käytetään Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä:

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} &\geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \\ &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n.\end{aligned}$$

**37.** Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+d)(b+c)}$.

**Ratkaisu.** Väite seuraa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{d} \cdot \sqrt{c} \leqslant \sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{d}\right)^2} \sqrt{\left(\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2} = \sqrt{a+d}\sqrt{b+c}.$$

**38.** Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $9a^2b^2c^2 \leqslant \left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right)$.

**Ratkaisu.** Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}9a^2b^2c^2 = (3abc)^2 &= \left(a\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}c + b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}a + c\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}b\right)^2 \\ &\leqslant \left(\left(a\sqrt{b}\right)^2 + \left(b\sqrt{c}\right)^2 + \left(c\sqrt{a}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{b}c\right)^2 + \left(\sqrt{c}a\right)^2 + \left(\sqrt{a}b\right)^2\right) \\ &= \left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right)\left(bc^2 + ca^2 + ab^2\right).\end{aligned}$$

**39.** Olkoot $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}.$$

**Ratkaisu.** Neliöimällä molemmat puolet todistettava epäyhtälö (nimeltään *Minkowskin epäyhtälö*) saa muodon:

$$(a_1 + b_1)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2 \leqslant a_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_1^2 + \ldots + b_n^2 + 2\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2},$$

mikä pienen sieventämisen jälkeen muuttuu tuttuun muotoon

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2};$$

tämähän on Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö.

**40.** Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$. a) Osoita, että

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}.$$

**Ratkaisu.** Osoitetaan väite induktiolla parametrin $n \in \mathbb{Z}_+$ suhteen. Tapauksessa $n = 1$ väitetyssä epäyhtälössä vallitsee varmasti yhtäsuuruus ja asia on selvä. Oletetaan siis, että väite pätee jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ jotkin $2(n+1)$ lukua. Tehdystä induktio-oletuksesta ja Minkowskyn epäyhtälöstä seuraa, että

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2} \\ \geqslant &\sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2} + \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2} \\ \geqslant &\sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1})^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n + b_{n+1})^2}.\end{aligned}$$

**41.** Olkoot $x$, $y$ ja $z$ ei-negatiivisia reaalilukuja. a) Osoita, että

$$(x+y+z)\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2}.$$

b) Oletetaan lisäksi, että $xyz \neq 0$. Osoita, että

$$2\sqrt{3} \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}.$$

c) Oletetaan lisäksi, että $0<x\leqslant y\leqslant z$. Osoita, että

$$\sqrt{y^2+z^2} \leqslant x\sqrt{2} + \sqrt{(y-x)^2+(z-x)^2}.$$

**Ratkaisu.** Nämä epäyhtälöt seuraavat suoraan Minkowskyn epäyhtälöstä:

a) $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} \geqslant \sqrt{(x+y+z)^2+(y+z+x)^2}$
$= \sqrt{2(x+y+z)^2} = (x+y+z)\sqrt{2}.$

b) $\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}} \geqslant \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2}$
$\geqslant \sqrt{2^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{3}.$

c) $\sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{(x+y-x)^2+(x+z-x)^2} \leqslant \sqrt{x^2+x^2} + \sqrt{(y-x)^2+(z-x)^2}$
$= x\sqrt{2} + \sqrt{(y-x)^2+(z-x)^2}.$

## Sekalaisia epäyhtälötehtäviä

**42.** Olkoot $a > b > 0$. Osoita, että lukujen $a+b$ ja $a-b$ käänteislukujen keskiarvo on suurempi kuin luvun $a$ käänteisluku.

**Ratkaisu.** Lukujen $a+b$ ja $a-b$ käänteislukujen keskiarvo on

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a-b+a+b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a}{a^2-b^2} > \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}.$$

**43.** Kumpi luvuista

$$\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1} \text{ ja } \frac{10^{2007}+1}{10^{2008}+1}$$

on suurempi?

**Ratkaisu.** Arvioidaan näiden lukujen erotusta:

$$\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1} - \frac{10^{2007}+1}{10^{2008}+1} = \frac{10^{2006+2008}+10^{2008}+10^{2006}+1-10^{2007+2007}-2\cdot 10^{2007}-1}{(10^{2007}+1)\,(10^{2008}+1)}$$
$$= \frac{10^{2008}+10^{2006}-2\cdot 10^{2007}}{(10^{2007}+1)\,(10^{2008}+1)} = \frac{10^{2006}\cdot(100+1-20)}{(10^{2007}+1)\,(10^{2008}+1)} = \frac{81\cdot 10^{2006}}{(10^{2007}+1)\,(10^{2008}+1)} > 0.$$

Siis ensimmäinen luku on suurempi.

**44.** Olkoot $a$, $b$ ja $c$ sellaisia reaalilukuja, että $abc = 1$. Osoita, että enintään kaksi luvuista

$$2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c} \text{ ja } 2c-\frac{1}{a}$$

voivat olla suurempia kuin yksi.

**Ratkaisu.** Tehdään se vastaoletus, että kaikki kolme lukua olisivat suurempia kuin yksi. Tällöin olisi:

$$\begin{aligned}
&\left(2a-\frac{1}{b}\right)\left(2b-\frac{1}{c}\right)\left(2c-\frac{1}{a}\right)>1\\
\iff&8abc-4(a+b+c)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-abc>1\\
\iff&2(a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)<3.
\end{aligned}$$

Toisaalta olisi myös

$$2(a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2a-\frac{1}{b}+2b-\frac{1}{c}+2c-\frac{1}{a}>1+1+1=3,$$

mikä on ristiriidassa aiemman epäyhtälön kanssa.

**45.** a) Olkoot $a>b>1$. Osoita, että

$$\frac{a}{b}+\frac{1}{a}>\frac{1}{b}+1.$$

b) Olkoot $a,b\in\mathbb{R}_+$. Osoita, että $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.
c) Olkoot $0<a<b$. Osoita, että

$$\frac{3a+b}{\sqrt{a}}>\frac{a+3b}{\sqrt{b}}.$$

**Ratkaisu.** a) Koska luvut $ab$ ja $a-1$ ovat positiivisia, saa niillä kertoa ja jakaa epäyhtälöitä puolittain. Täten:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}+\frac{1}{a}>\frac{1}{b}+1\iff\frac{a^2+b}{ab}>\frac{a+ab}{ab}\iff a^2+b>a+ab\\
\iff a^2-a>ab-b\iff a(a-1)>b(a-1)\iff a>b.
\end{aligned}$$

b) Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $a\geqslant b$. Koska tapauksessa $a=b$ todistettavan epäyhtälön molemmat puolet ovat yhtäsuuret, riittää todistaa väite vain tapauksessa $a>b$. Tässä tapauksessa $a-b>0$ ja voidaan päätellä:

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2\iff a^3-a^2b\geqslant ab^2-b^3\iff a^2(a-b)\geqslant(a-b)b^2\iff a^2\geqslant b^2,$$

missä viimeinen epäyhtälö tietenkin pätee.

c) Koska luku $\sqrt{ab}$ on positiivinen, voi sillä kertoa epäyhtälöitä puolittain. Tehdään niin:

$$\begin{aligned}
\frac{3a+b}{\sqrt{a}}>\frac{a+3b}{\sqrt{b}}\iff\frac{3a\sqrt{b}+b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}>\frac{a\sqrt{a}+3b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}\iff 3a\sqrt{b}+b\sqrt{b}>a\sqrt{a}+3b\sqrt{a}\\
\iff\left(\sqrt{b}\right)^3-3\left(\sqrt{b}\right)^2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^3>0\iff\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^3>0.
\end{aligned}$$

Tässä viimeinen epäyhtälö pätee koska $\sqrt{b}>\sqrt{a}$.

**46.** Etsi ne reaaliluvut $x\neq 1$, joille $\dfrac{1}{1-x}>1+x$.

**Ratkaisu.** Tutkitaan ensin, löytyykö ratkaisuita $x$, joille $x>1$. Kun $x>1$, voidaan päätellä:

$$\frac{1}{1-x}>1+x\iff 1<(1+x)(1-x)\iff 1<1-x^2\iff x^2<0,$$

ja selvästikään tarkasteltava epäyhtälö ei voi ratketa. Halutuille ratkaisuille pätee siis, että $x<1$. Tällöin voidaan päätellä:

$$\frac{1}{1-x}>1+x\iff 1>(1+x)(1-x)\iff 1>1-x^2\iff x^2>0.$$

Tässä viimeisin epäyhtälö toteutuu täsmälleen silloin kun $x\neq 0$. Siis ratkaisuiksi saadaan ne reaaliluvut $x$, joille $x\neq 0$ ja $x<1$, tai yhtäpitävästi: $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,1[$.

**47.** Olkoot $x \geqslant -1$ reaaliluku ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että $1 + nx \leqslant (1+x)^n$.

**Ratkaisu.** Olkoon annettu kiinteä $x \in [-1, \infty[$. Todistetaan väite induktiolla parametrin $n \in \mathbb{Z}_+$ suhteen. Tapauksessa $n = 1$ väite yksinkertaistuu muotoon $1 + x \leqslant 1 + x$, missä itse asiassa pätee aina yhtäsuuruus, ja asia on selvä. Oletetaan, että $1 + nx \leqslant (1+x)^n$ jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x,$$

ja nyt väite seuraa induktioperiaatteesta.

**48.** Olkoot $x > 1$ reaaliluku. Osoita, että $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} > \dfrac{3}{x}$.

**Ratkaisu.** Väite seuraa suoraan havainnosta

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x^2-1} > \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$$

**49.** Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**Ratkaisu.** Käyttämällä aritmeettisharmonista epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 \\
=&(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \geqslant (a+b+c)\frac{9}{b+c+c+a+a+b} - 3 \\
=&(a+b+c)\frac{9}{2(a+b+c)} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

**50.** Olkoot $a$, $b$, $c$ ja $d$ sellaisia positiivisia reaalilukuja, että $a + b + c + d = 4$. Osoita, että tällöin

$$\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a+b+d} + \sqrt{a+c+d} + \sqrt{b+c+d} \geqslant 6.$$

**Ratkaisu.** Koska välin $]0, 1[$ reaaliluvuille $x$ pätee aina $\sqrt{x} \geqslant x$, voidaan arvioida:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a+b+d} + \sqrt{a+c+d} + \sqrt{b+c+d} \\
=&2\left(\sqrt{\frac{a+b+c}{4}} + \sqrt{\frac{a+b+d}{4}} + \sqrt{\frac{a+c+d}{4}} + \sqrt{\frac{b+c+d}{4}}\right) \\
=&2\left(\sqrt{\frac{a+b+c}{a+b+c+d}} + \sqrt{\frac{a+b+d}{a+b+c+d}} + \sqrt{\frac{a+c+d}{a+b+c+d}} + \sqrt{\frac{b+c+d}{a+b+c+d}}\right) \\
\geqslant&2\left(\frac{a+b+c}{a+b+c+d} + \frac{a+b+d}{a+b+c+d} + \frac{a+c+d}{a+b+c+d} + \frac{b+c+d}{a+b+c+d}\right) \\
=&2 \cdot \frac{a+b+c+a+b+d+a+c+d+b+c+d}{a+b+c+d} = 2 \cdot \frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 6.
\end{aligned}$$