Funktionaaliyhtälöistä

Kerkko Luosto ja Antti Honkela

Toukokuu 2003

1 Yleistä

Funktionaaliyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöitä tai yhtälöryhmiä, joissa esiintyy muuttujien ja tunnettujen funktioiden lisäksi tuntemattomia funktioita. Tehtävänä on etsiä sellaiset funktiot, jotka toteuttavat nämä kaikilla muuttujien arvoilla. Esimerkkejä funktionaaliyhtälöistä ovat

$$F(x, G(y, z)) = F(G(x, y), z)$$

ja

$$\begin{cases} F(x+y) = F(x) + F(y) \\ G(t \cdot u) = G(t)G(u). \end{cases} \tag{1}$$

Funktionaaliyhtälöissä voi siis esiintyä yhden tai useamman muuttujan funktioita, sekä määrittelyjoukkona ja arvojoukkona voi olla yhtä hyvin kaikkien avaruusvektorien joukko kuin $\mathbb{R}$ tai kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$. Tässä esityksessä keskitytään yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisiin kuvauksiin, ts. funktioihin $f : A \to B$, missä $A, B \subset \mathbb{R}$.

Funktionaaliyhtälöille on vaikeata esittää yleistä teoriaa. Tämä kuvastuu siinä, että ratkaisun olemassaolokin on laskettavuuden teorian termein ilmaistuna *ratkeamaton* ongelma, mikä käytännössä merkitsee samaa, kuin että on mahdotonta laatia tietokoneohjelmaa, joka funktionaaliyhtälön syötteenä saatuaan kertoisi, onko yhtälöllä ratkaisua.

Harjoitustehtävä: Osoita, että funktionaaliyhtälöllä $F(x + y) = F(x) + F(y) + x$ ei ole ratkaisuja.

1.1 Lisäehdot

Tuntemattomille funktioille asetetaan usein ylimääräisiä ehtoja, kuten että niiden täytyy olla jatkuvia tai saada vain positiivisia arvoja. Nämä rajoitukset vaikuttavat usein ratkaisevasti tehtävien luonteeseen. Funktionaaliyhtälöiden ilmaisuvoimaa kuvastaa se, että usein lisäehdot ovat koodattavissa yhtälöiksi. Ehto $F(0) = 2$ on jo itsessään funktionaaliyhtälö, mutta epäyhtälö $F(x) \geq 0$ voidaan myös kirjoittaa yhtälömuotoon $F(x) = G(x)^2$ ottamalla käyttöön uusi tuntematon funktio G. Vastaavasti yhtälöllä $(F(x) - F(y))(x - y) = G(x, y)^2$ on kiinteätä F kohti ratkaisu täsmälleen silloin, kun F on kasvava.

Harjoitustehtävä: Ilmaise seuraavat ominaisuudet sopivien funktionaaliyhtälöryhmien ja uusien tuntemattomien funktioiden avulla: a) F on bijektio, b) F on jatkuva.

1.2 Yhtälöiden yhdistely

Funktionaaliyhtälöryhmä voidaan koota yhdeksi yhtälöksi. Oletetaan nimittäin, että alkuperäiset yhtälöt ovat muotoa $t_k = t'_k$, $k = 1, \ldots, n$. Siirretään ensin kaikki termit vasemmalle puolelle ($t_k - t'_k = 0$, kun $k = 1, \ldots, n$), ja lasketaan sitten vasempien puolten neliöiden summa. Havaitaan, että yhtälöllä $\sum_{k=1}^{n}(t_k - t'_k)^2$ on täsmälleen samat ratkaisut kuin yhtälöryhmällä. Esimerkiksi yhtälö

$$(F(x+y) - F(x) - F(y))^2 + (G(t+u) - G(t) \cdot G(u))^2 = 0 \tag{2}$$

on yhtäpitävä parin (1) kanssa. Yllättävämpää on, että yhden muuttujan tapauksessa myös äärellinen määrä tuntemattomia funktioita voidaan yhdistää yhdeksi. Tarkastellaan tätä tekniikkaa esimerkin (2) valossa. Korvataan yhtälössä tuntematon F kuvauksella $H \circ f$ ja G kuvauksella $H \circ g$, missä f ja g ovat injektioita, joiden arvoalueet eivät leikkaa. Valitaan vaikkapa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -e^x$; tällöin päädytään yhtälöön

$$(H(e^{x+y}) - H(e^x) - H(e^y))^2 + (H(-e^{t+u}) - H(-e^t) - H(-e^u))^2 = 0. \tag{3}$$

Jos H on yhtälön (3) ratkaisu, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = H(e^x)$ ja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = H(-e^x)$ täyttävät selvästi yhtälön (2). Kääntäen jos F ja G ovat yhtälön (2) ratkaisuja, mielivaltaisella $a \in \mathbb{R}$

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} F(\ln x), & \text{kun } x > 0 \\ a, & \text{kun } x = 0 \\ G(-\ln x), & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

toteuttaa yhtälön (3).

Tällaisten koodausten onnistuminen riippuu tietenkin siitä, minkälaisia tunnettuja kuvauksia sallitaan yhtälöissä, tähänhän mennessä esimerkeissä on esiintynyt vain ns. alkeisfunktioita. Sopivan koukeroisen kuvauksen avulla pystyttäisiin peräti useamman muuttujan tapaus palauttamaan yhteen muuttujaan. Jatkossa voidaan varsin hyvin omatunnoin rajoittua yhteen yhtälöön, yhden tuntemattoman yhden muuttujan funktion tapaukseen.

2 Ratkaiseminen

2.1 Cauchyn yhtälö

Cauchyn yhtälöksi kutsutaan seuraavaa:

$$F(x+y) = F(x) + F(y).$$

Sijoittamalla $x = y = 0$ saadaan $F(0) = F(0+0) = F(0) + F(0) = 2F(0)$, joten $F(0) = 0$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Osoitetaan induktiolla, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee $F(nx) = nF(x)$. Tapaus $n = 0$ on jo käsitelty. Oletetaan, että $F(nx) = nF(x)$; tällöin $F((n+1)x) = F(nx+x) = F(nx)+F(x) = nF(x)+F(x) = (n+1)F(x)$. Koska $0 = F(0) = F(nx+(-n)x) = F(nx) + F((-n)x) = nF(x) + F((-n)n)$, saadaan $F((-n)x) = -nF(x)$, joten vastaava yhtälö pätee itse asiassa kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Edelleen jokainen rationaaliluku on muotoa $q = m/n$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, joten

$$F(qx) = \frac{1}{n} \cdot nF(qx) = \frac{1}{n}F(nqx) = \frac{1}{n}F(mx) = \frac{m}{n}F(x) = qF(x).$$

Sijoittamalla erityisesti $x = 1$ saadaan $F(q) = qF(1)$. Tästä voidaan suhteellisen vaivattomasti päätellä, että Cauchyn yhtälön jatkuvat ratkaisut ovat muotoa $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = kx$, missä $k \in \mathbb{R}$.

Cauchyn yhtälön yleinen ratkaisu on varsin merkillinen. Joukko-opista tiedetään, että on olemassa sellainen joukko S reaalilukuja, että jokainen $r \in \mathbb{R}$ voidaan esittää yksikäsitteisessä muodossa

$$r = \sum_{k=1}^{n} q_k s_k, \tag{4}$$

missä $n \in \mathbb{N}$, $q_k \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $s_k \in S$, $k = 1, \ldots, n$ ja $s_1 < \ldots < s_n$. Rajoittuma $F \restriction S = f : S \to \mathbb{R}$ määrää ratkaisun yksikäsitteisesti, edellisestä tarkastelustahan seuraa, että kun yhtälö (4) on voimassa,

$$F(r) = \sum_{k=1}^{n} F(q_k s_k) = \sum_{k=1}^{n} q_k F(s_k) = \sum_{k=1}^{n} q_k f(s_k).$$

Kääntäen jokaista $f : S \to \mathbb{R}$ vastaa funktionaaliyhtälön ratkaisu, jolle $F \restriction S = f$. Jonkinlaisen käsityksen yleisestä ratkaisusta saa tarkastelemalla Cauchyn yhtälöä määrittelyjoukossa $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Tällöin $F : A \to \mathbb{R}$, $F(x + y\sqrt{2}) = x + 6y$ on ratkaisu. Koetapa piirtää kuvaaja!

Harjoitustehtävä: Osoita, että jos $x + y\sqrt{2} = x' + y'\sqrt{2}$ ja $x, y, x', y' \in \mathbb{Q}$, niin $x = x'$ ja $y = y'$.

2.2 Muunnelmia

Tarkastellaan yhtälöä

$$G(x + y) = G(x) \cdot G(y).$$

Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $G(x) = G(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = G(\frac{x}{2})G(\frac{x}{2}) = G(\frac{x}{2})^2 \geq 0$. Jos $G(x_0) = 0$ jollakin $x_0 \in \mathbb{R}$, niin kaikille $x \in \mathbb{R}$ on voimassa $G(x) = G(x - x_0 + x_0) = G(x - x_0)G(x_0) = G(x - x_0) \cdot 0 = 0$. Toisaalta $G_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G_0(x) = 0$ on selvästikin funktionaaliyhtälön ratkaisu. Muille ratkaisuille $G \neq G_0$ pätee $G(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \ln G(x)$ on määritelty ja F on Cauchyn yhtälön ratkaisu:

$$F(x + y) = \ln G(x + y) = \ln(G(x)G(y)) = \ln G(x) + \ln G(y) = F(x) + F(y).$$

Kääntäen jos F on Cauchyn yhtälön ratkaisu, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = e^{F(x)}$ toteuttaa tarkasteltavan yhtälön. Koska F on jatkuva, jos ja vain jos G on jatkuva, tutkittavan yhtälön jatkuvat ratkaisut ovat G_0 ja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = e^{kx}$, missä $k \in \mathbb{R}$.

Jensenin yhtälö on

$$H\Big(\frac{x + y}{2}\Big) = \frac{H(x) + H(y)}{2}.$$

Jenseninkin yhtälö palautuu Cauchyn yhtälöön: Merkitään $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = H(x) - H(0)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
F(x + y) &= H\Big(\frac{2x + 2y}{2}\Big) - H(0) = \frac{H(2x) + H(2y)}{2} - H(0) \\
&= \frac{H(2x) + H(0)}{2} + \frac{H(2y) + H(0)}{2} - 2H(0) \\
&= H\Big(\frac{2x + 0}{2}\Big) + H\Big(\frac{2y + 0}{2}\Big) - 2H(0) \\
&= H(x) - H(0) + H(y) - H(0) = F(x) + F(y).
\end{aligned}$$

3 Tarkkailtavia piirteitä

Edellisen luvun funktionaaliyhtälöissä ei ollut lainkaan tuntemattoman funktion sisäkkäisiä esiintymiä. Valitettavasti niitä on varsin usein olympiatehtävissä (merkintöjä on muutettu):

$$F(xF(y)) = yF(x), \tag{83.1}$$

$$G(xG(y))G(y) = G(x+y), \tag{86.5}$$

$$H(x^2 + H(y)) = y + H(x)^2. \tag{92.2}$$

Kahdessa näistä tehtävissä oli lisäksi rajoittavia ehtoja. Esimerkkiaineiston kartuttamiseksi tässä luvussa lisäehdot ovat toisarvoisessa asemassa. Tehtävien varsinaisen ratkaisemisen sijasta katsotaan, mitä ominaisuuksia funktionaaliyhtälöstä seuraa ratkaisulle.

3.1 Kiintopisteet

Alkio x on funktion f *kiintopiste*, jos $f(x) = x$. Kiintopisteet ovat tärkeitä, koska ne auttavat sieventämään yhtälöitä. Olkoon tehtävän 83.1 kiintopisteiden joukko K_1 ja tehtävän 92.2 K_3. Jokaiselle $x \in \mathbb{R}$ pätee $F(xF(x)) = xF(x)$, joten $xF(x) \in K_1$. Erityisesti $0 = 0F(0) \in K_1$. K_1 on kertolaskun suhteen suljettu, sillä jos $x, y \in K_1$, niin $F(xy) = F(xF(y)) = yF(x) = yx = xy$, joten $xy \in K_1$. Jos tehtävän rajoitusehdot otetaan huomioon, ainoa F:n ainoa positiivinen kiintopiste on 1! Vastaavasti tehtävässä 92.2. havaitaan välittömästi, että K_3 on seuraavalla tavalla suljettu: jos $x \in K_3$, $H(x^2 + x) = H(x^2 + H(x)) = x + H(x)^2 = x^2 + x$ eli $x^2 + x \in K_3$.

3.2 Neutraalialkiot 0 ja 1

Nolla on yhteenlaskun ja ykkönen kertolaskun neutraalialkio: kun $x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$ ja $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (lisäksi huomattakoon, että $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$). Näihin kaavoihin suhtaudutaan usein jokseenkin halveksien, ikään kuin ne olisivat typerintä, mitä voi esittää. Kaavat ovat kuitenkin tuiki tarpeellisia sieventämisessä: niiden avulla voi saada selville funktionaaliyhtälön ratkaisun arvoja yksittäisessä pisteessä (sijoittamalla yhtälöön 83.1 $x = y = 0$ saadaan $F(0) = F(0 \cdot F(0)) = 0F(0) = F(0))$ tai johdettua yksinkertaisempia funktionaaliyhtälöjä (sijoittamalla $x = 1$ todetaan, että $F \circ F$ on lineaarinen: $F(F(y)) = F(1 \cdot F(y)) = yF(1)$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$). Taito on sen havaitsemisessa, mikä lauseke voi olla 0 tai 1; erityisesti kannattaa tutkia, voivatko funktion argumentit supistua. Funktionaaliyhtälöä 92.2 ratkaistaessa on liiankin helppoa huomata, että x^2 voi olla nolla, koska $x = 0$ on mahdollista: $H(H(y)) = H(0^2 + H(y)) = y + H(0)^2$. Mutta voiko $H(y)$ olla nolla? Jos on olemassa sellainen luku $r \in \mathbb{R}$, että $H(r) = 0$, niin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee toisaalta $H(x^2) = H(x^2 + H(r)) = r + H(x)^2$, toisaalta myös $H(r^2 + H(x)) = x + H(r)^2 = x + 0^2 = x$.

3.3 Injektiivisyys jne

Funktio $f : A \to B$ on *injektio*, jos $f(x) \neq f(y)$, kun x ja y ovat joukon A eri alkioita. Jokaisen yhtälön kohdalla voidaan sanoa jotain ratkaisujen injektiivisyydestä ratkaisematta täydellisesti yhtälöjä. Nollafunktio $F_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_0(x) = 0$, on luonnollisesti tehtävän 83.1 ratkaisu, joten kaikki ratkaisut eivät ole injektioita. Mutta jos $F \neq F_0$ toteuttaa ko. funktionaaliyhtälön, niin jollakin $x \in \mathbb{R} \quad F(x) \neq 0$, joten jos $F(y) = F(y')$, niin $yF(x) = F(xF(y)) = F(xF(y')) = y'F(x)$ ja siten $y = y'$. Siis jos F on tehtävän 83.1 ratkaisu, niin joko $F = F_0$ tai F on injektio.

Tutkitaan yhtälön 86.5 ratkaisuja G. Oletetaan, että G ei ole injektio, ts. on olemassa $y, y' \in \mathbb{R}$, joille $G(y) = G(y')$. Merkitään $d = y - y'$; tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $G(x+d) = G((x-y')+y) = G((x-y')G(y))G(y) = G((x-y')G(y'))G(y') = G(x-y'+y') = G(x)$. Siis jos G ei ole injektio, se on *jaksollinen.*

Funktio $f : A \to B$ on *surjektio*, jos $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\} = B$, ja *bijektio*, jos se on sekä injektio että bijektio. Neutraalialkioiden kohdalla jo todettiin, että yhtälön 92.2 ratkaisuille H pätee, että $H \circ X$ on ensimmäisen asteen polynomifunktio. Siis $H \circ H$ on bijektio, joten myös H on bijektio. Erityisesti vastaus kysymykseen, voiko $H(r)$ olla nolla, on myönteinen: asetetaan $r = H^{-1}(0)$.

Harjoitustehtäviä: Etsi toinen tapa osoittaa, että H on injektio. Todista, että jos $f : A \to A$ on sellainen funktio, että $f \circ f$ on bijektio, niin f itse on bijektio. H:lle on johdettu kaksi uutta funktionaaliyhtälöä; ratkaise niiden perusteella $H(0)$ ja $H^{-1}(0)$.

4 Ratkaisun jatkaminen reaaliluvuille

Kuten yllä Cauchyn yhtälön kohdalla nähtiin, on monien yhtälöiden ratkaiseminen reaalilukujen joukossa hyvin vaikeaa ilman ylimääräisiä oletuksia esimerkiksi ratkaisun jatkuvuudesta. Yhtälön ratkaisu rationaaliluvuilla on konstruoitavissa suhteellisen helposti parilla induktiolla, mutta yleinen ratkaisu on paljon hankalampi tapaus.

Tarkastellaan nyt tapoja, joilla jollekin reaalilukujen osajoukolle, esimerkiksi rationaaliluvuille saatu ratkaisu voidaan jatkaa kaikille reaaliluvuille. Ilmeisin tapa tähän on jo aiemmin esitetty jatkuvuusargumentti, mutta myös muita mahdollisuuksia on.

4.1 Jatko monotonisuuden perusteella

Funktion monotonisuus on jatkuvuuden lisäksi toinen hyödyllinen ominaisuus, jonka avulla ratkaisu voidaan jatkaa rationaaliluvuilta tai joltain muulta sopivalta reaalilukujen osajoukolta kaikille reaaliluvuille. Jos esimerkiksi oletetaan, että Cauchyn yhtälön ratkaisu $F(x)$ toteuttaa $F(x) \geq 0$, kun $x \geq 0$, saadaan helposti

$$F(x+y) = F(x) + F(y) \geq F(x),$$

kun $y \geq 0$ ja F on näin kasvava. Olettaen että yhtälöllä on rationaalilukujen joukossa ratkaisu $F(r) = kr$, voidaan nyt muodostaa jokaista reaalilukua x kohden jonot $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ ja $(R_i)_{i=1}^{\infty}$ siten, että $r_i, R_i \in \mathbb{Q}$, $r_i < x < R_i$ kaikilla i ja $\lim r_i = \lim R_i = x$. Tällöin

$$kr_i = F(r_i) \leq F(x) \leq F(R_i) = kR_i$$

ja raja-arvona $F(x) = kx$. Vähenevän funktion kohdalla raja-arvotarkastelu menee pääpiirteissään samalla tavalla.

Edellisessä esimerkissä voidaan rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ korvata myös millä tahansa muulla reaalilukujen *tiheällä* osajoukolla, ts. joukolla, jonka pisteitä on jokaisen $x \in \mathbb{R}$ mielivaltaisen pienissä ympäristöissä. Koko rationaalilukujen joukko toteuttaa tämän ehdon, mutta niin toteuttavat lisäksi esimerkiksi eräät sen osajoukot kuten

$$S = \left\{ \frac{n}{2^m} \middle| n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Myös jatko jatkuvuudella onnistuu mistä tahansa tiheästä joukosta lähtien.

4.2 Yleistys jatkuvuudesta yhdessä pisteessä

Cauchyn yhtälön kohdalla riittää myös olettaa jatkuvuus yhdessä pisteessä x_0, jotta koko ratkaisu on jatkuva. Tällöin nimittäin yleisessä pisteessä x

$$\begin{aligned}\lim_{u \to x} f(u) &= \lim_{u-x+x_0 \to x_0} f[(u - x + x_0) + (x - x_0)] = \lim_{t \to x_0} f[t + (x - x_0)] \\ &= \lim_{t \to x_0} f(t) + f(x - x_0) = f(x_0) + f(x - x_0) = f(x_0 + x - x_0) = f(x),\end{aligned}$$

koska oletuksen mukaan $\lim_{t \to x_0} f(t) = f(x_0)$ ja näin ratkaisu on jatkuva myös pisteessä x.

4.3 Esimerkki

Tarkastellaan olympiatehtävää

$$(F(x) + F(y))(F(u) + F(v)) = F(xu - yv) + F(xv + yu), \tag{02.5}$$

jossa tehtävän oletuksiin ei kuulunut ratkaisun jatkuvuutta. On kuitenkin helppo osoittaa, että ratkaisu on positiivisilla arvoilla kasvava, minkä tiedon avulla on helppo jatkaa standardimenetelmin esimerkiksi rationaaliluvuille muodostettu ratkaisu reaaliluvuille.

Sijoitetaan yhtälöön ensin $x = y = u = v = 0$, jolloin $4F(0)^2 = 2F(0)$, josta $F(0) \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. Oletus $F(0) = \frac{1}{2}$ johtaa triviaaliratkaisuun $F(x) \equiv \frac{1}{2}$, joten tarkastellaan tapausta $F(0) = 0$. Sijoituksella $y = u = 0, v = x$ saadaan $F(x)^2 = F(x^2)$, jonka perusteella funktio on positiivinen positiivisilla x:n arvoilla. Sijoituksella $u = y, v = x$ saadaan nyt $(F(x) + F(y))^2 = F(x^2 + y^2)$, josta helposti nähdään

$$F\left(x^2 + y^2\right) = F\left(x^2\right) + 2F(x)F(y) + F\left(y^2\right) \geq F\left(x^2\right),$$

kun $x, y \geq 0$ eli haluttu kasvavuus on osoitettu.

Harjoitustehtävä: Osoita, että yhtälön $\lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) = F(\lambda x + (1 - \lambda)y) + G(x, y)^2$, $0 < \lambda < 1$ ratkaisut $F(x)$, ns. *konveksit* funktiot, ovat jatkuvia.

Viitteet

[1] J. Aczél: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Birkhäuser Verlag, 1961.

[2] Matti Lehtinen (toim.): *Matematiikan olympiakirja.* Weilin+Göös, 1995.