Nuo mainiot binomikertoimet

Osaston A numeroista osa ja kaikki osaston B numerot on varustettu tähdellä. Tällaisissa numeroissa esitetyn väitteen todistus tai tehtävän ratkaisu esitetään osastossa C.

A. Kertoimet ja binomikaava

1. Binomikertoimet liitetään tavallisesti ranskalaiseen *Blaise Pascaliin* (1623–62) ja hänen kolmioonsa. ”Pascalin kolmion”

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

tunsivat jo kiinalaiset ja useat eurooppalaiset ennen Pascalia.
Jos k on positiivinen kokonaisluku, niin $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$. Lisäksi $0! = 1$. Jos n on positiivinen kokonaisluku ja $k \le n$, niin *binomikerroin* $\binom{n}{k}$ on luku $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. On tapana lukea ”n k:n yli” (englanniksi ”n choose k”). Binomikertoimien perusominaisuus on Pascalin kolmiosta näkyvä muodostusperiaate eli yhteenlaskukaava

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad k \ne 0. \tag{1}$$

$\binom{n}{k}$:n määritelmästä seuraa

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{2}$$

ja

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}. \tag{3}$$

Induktiolla on melko helppo todistaa *binomikaava*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n. \tag{4}$$

Selvästi $(x+y)^1 = y + x = \binom{1}{0}x^0y^1 + \binom{1}{1}x^1y^0$. Jos (4) pätee jollain n, niin

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$

$$= \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0.$$

Kun otetaan huomioon (1) ja se, että $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, sadaan

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k},$$

ja induktioaskel on otettu.

Binomikertoimien merkitys kombinatoriikassa ja todennäköisyydessä perustuu pitkälti siihen, että jos joukossa on n alkiota, sillä on $\binom{n}{k}$ sellaista osajoukkoa, jossa on k alkiota. Tämän voi perustella laskemalla kahdella eri tavalla, kuinka monta erilaista k:n alkion jonoa n:stä alkioista voi muodostaa. Toisaalta tämä lukumäärä on $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ (ensimmäinen jonon jäsen voidaan valita n:llä tavalla, seuraava enää $(n-1)$:llä jne.), mutta jos osajoukkoja on x kappaletta, niin jonojen määrä on $x \cdot k!$ (jonon jäsenet voidaan valita x:llä tavalla ja sitten panna $k!$ eri tavalla jonoon). Kun yhtälöstä $n(n-1)\cdots(n-k+1) = x \cdot k!$ ratkaistaan x, saadaan $x = \binom{n}{k}$. Kun "osajoukon" synonyymina on käytetty sanaa "kombinaatio", on saatu merkintä $\binom{n}{k} = C_n^k$ (n ja k voivat sijaita toisinkin C:n ympärillä); tässä C viittaa kombinaatio-sanaan. Laskimissa näppäin, jonka alla binomikertoimet ovat, on usein tunnistettavissa C-kirjaimesta.

Joskus on mukavaa ulottaa merkintä $\binom{n}{k}$ tapauksiin, joissa $k < 0$ tai $n < k$; tällöin sovitaan, että $\binom{n}{k} = 0$.

2*. Todista oikeiksi yhteenlaskukaavat

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k},$$
$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

3. Edelliset yhteenlaskukaavat ovat käteviä, kun yritetään laskea peräkkäisten kokonaislukujen potenssien summia. Ensimmäinen havainto on, että $k = \binom{k}{1}$, joten

$$1 + 2 + \ldots + n = \binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} = \binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(Tämän kaavan sisällön näkee kivasti, kun jakaa $n \times n + 1$-ruudukon kahteen yhtenevään osaan "pylväillä", joiden korkeudet ovat 1, 2, ..., n.)

Jotta saataisiin määritetyksi $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, todetaan ensin, että jos $n \geq 2$, niin $2\binom{n}{2} = n(n-1) = n^2 - n$. Näin ollen

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 1 + 2\left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{n}{2}\right) + 2 + 3 + \ldots + n$$
$$= 2\binom{n+1}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4*. Osoita, että summan $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ voi myös laskea käyttämällä hyväksi kaavaa $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Keksitkö vielä muita tapoja?

5*. Laske summat

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{n} k^4.$$

6*. Edellä käsitellyt summat olivat tärkeitä myös integraalilaskennan alkuvaiheissa 1600-luvulla. Käyrän $y = x^p$, $0 \leq x \leq 1$, ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala eli

$$\int_0^1 x^p \, dx,$$

on isoilla n:n arvoilla suunnilleen sama kuin summa

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n}.$$

Määritä edellisten numeroiden tulosten avulla

$$\int_0^1 x^p \, dx, \quad p = 1, 2, 3, 4.$$

7. Binomikaavan perusteella on selvää, että

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Samaa ideaa käyttäen voi johtaa muita kaavoja. Esimerkiksi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n.$$

Kaavan (3) avulla saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}. \tag{5}$$

Samalla tavoin voidaan laskea

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \tag{6}$$

8. Kaavojen (5) ja (6) tapaisia relaatioita voi johtaa aivan toisellakin tekniikalla, käyttämällä ns. generoivia funktioita ja esimerkiksi differentiaali- ja integraalilaskentaa. Kun esimerkiksi

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

derivoidaan, saadaan

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1},$$

ja kun tähän sijoitetaan $x = 1$, saadaan (5).

9*. Johda (6) integroimalla binomikaava.

10*. Määritä

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

11. Binomikertoimille $\binom{n}{k}$ saa vielä uuden merkityksen ja samalla keinon löytää sen ominaisuuksia seuraavasta havainnosta. Ajatellaan polkuja, jotka alkavat xy-tason origosta $(0, 0)$ ja etenevät yksikön pituisin askelin, jotka otetaan aina joko ylös tai oikealle, siis joko $(p, q) \to (p+1, q)$ tai $(p, q) \to (p, q+1)$. Osoittautuu, että pisteeseen (n, k) johtavia polkuja on $\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$. Todistetaan tämä induktiolla $n+k$:n suhteen. Väite on ilmeinen, kun $n + k = 1$: pisteisiin $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ vie kumpaankin vain yksi polku. Oletetaan, että väite pätee arvolla $n + k - 1$. Pisteeseen (n, k) johtavat polut voi jakaa kahdeksi erilliseksi joukoksi, $(n-1, k)$:n kautta kulkeviin ja $(n, k-1)$:n kautta kulkeviin. Jos $n = 0$ tai $k = 0$, toinen joukoista on tyhjä; muissa tapauksissa näihin pisteisiin tulevien polkujen lukumäärät ovat induktio-oletuksen mukaan $\binom{n+k-1}{k}$ ja $\binom{n+k-1}{k-1}$. Yhteenlaskukaava (1) johtaa väitteeseen.

12*. Osoita, että

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

13. Vielä yksi tapa löytää ja todistaa binomikertoimia koskevia relaatioita on osajoukkojen lukumäärän laskeminen. Olkoon A joukko, jossa on $n+k$ alkiota. Olkoon vielä $A = B \cup C$, missä B on joukko, jossa on n alkiota ja C on joukko, jossa on k alkiota (joten $B \cap C = \emptyset$). Jos $D \subset A$ on j-alkioinen joukko, niin $D = (B \cap D) \cup (C \cap D)$, ja $B \cap D$ on r-alkioinen, $C \cap D$ $(j-r)$-alkioinen jollain r, $0 \le r \le n$. Toisaalta jokainen B:n r-alkioisen osajoukon ja C:n $(j-r)$-alkioisen osajoukon yhdiste on A:n j-alkioinen osajoukko. Kun r saa kaikki arvot nollasta j:hin, saadaan kaikki A:n j-alkioiset osajoukot. Niitä on siis

$$\binom{n}{0}\binom{k}{j} + \binom{n}{1}\binom{k}{j-1} + \ldots + \binom{n}{j}\binom{k}{0}.$$

(Jos $j > k$ tai $j > n$, osa kertoimista on nollia.) Toisaalta A:n j-alkioisten osajoukkojen määrä on $\binom{n+k}{j}$. Siis

$$\binom{n+k}{j} = \sum_{r=0}^{j} \binom{n}{r}\binom{k}{j-r}. \tag{8}$$

14. Binomikaava (4) on puhtaasti algebrallinen relaatio. Se on siten voimassa myös, kun x ja y ovat kompleksilukuja. Kun kaavaan valitaan sopivia kompleksilukuja, saadaan yllättäviä reaalisia yhteyksiä. Kun käytetään hyväksi relaatiota $i^2 = -1$, saadaan heti

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k = \left(1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots\right) + i\left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \ldots\right).$$

Toisaalta De Moivre kaavan

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

käyttöä antaa

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i \sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Siten

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4},$$
$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}.$$

15. Binomikaavalle on paljon käyttöä matemaattisessa analyysissä. On esimerkiksi "yleisesti tunnettu tosiasia", että jos $a > 1$ ja k on kiinteä positiivinen luku, niin eksponenttifunktio a^n aina päihittää potenssifunktion n^k, kun n kasvaa tarpeeksi suureksi. Mutta miksi?
Asetetaan $a = 1 + b$, $b > 0$, ja valitaan $n > 2k + 1$ or $n - k > \frac{n}{2}$, ja verrataan a^n:ää vain yhteen $(1 + b)^n$:n binomikehitelmän termiin:

$$a^n = (1+b)^n > \binom{n}{k+1} b^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} b^{k+1} > nb^{k+1} > n \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{b^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Kun valitaan n suuremmaksi kuin $\frac{2^k(k+1)!}{b^{k+1}}$, saadaan $a^n > n^k$. Koska

$$\frac{a^n}{n^k} > \text{vakio} \cdot n,$$

pätee

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty.$$

16. Mitä tapahtuisi, jos eksponentti binomikaavassa (4) ei olisi positiivinen kokonaisluku? Kokeillaan lukua $n = \frac{1}{2}$. Jos olisi

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

pitäisi olla

$$\begin{aligned} 1 + x &= (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots)^2 \\ &= A^2 + 2ABx + (2AC - B^2)x^2 + 2(AD + BC)x^3 + (2AE + 2BD + C^2)x^4 + \ldots \end{aligned}$$

Varma tapa saada edellinen yhtälö toteutumaan, on valita kertoimet niin, että molemmilla puolilla x^k:n kerroin on sama. Valitaan $A = 1$. Silloin on oltava $B = \frac{1}{2}$, $0 = 2AC + B^2 = 2C + \frac{1}{4}$ eli $C = -\frac{1}{8}$, $0 = AD + BC = D - \frac{1}{16}$ eli $D = \frac{1}{16}$, $0 = 2AE + 2BD + C^2 = 2E + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ eli $E = \frac{5}{128}$ jne.

17*. Miten mahtaisivat alkaa samalla periaatteella muodostetut summakehitelmät funktioille $(1 + x)^{\frac{2}{3}}$ ja $(1 + x)^{-2}$?

18. Itse asiassa (4) pätee muodollisesti mille tahansa eksponentille a:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Mutta nyt on huolehdittava siitä, että vasemman puolen lausekkeen määritelmä on kunnossa ja että oikean puolen mahdollisesti äärettömän monta yhteenlaskettavaa sisältävä summa on ymmärretty oikein. Itse asiassa käy niin, että kaava pätee aina, kun $|x| < 1$. Tulos voidaan todistaa matemaattisen analyysin menetelmin, mutta ohitetaan nyt. On kuitenkin hauska tietää, että kun Isaac Newton ponnisteli kohti differentiaali- ja integraalilaskentaa, hän suoritti monia edellisten numeroiden laskelmien kaltaisia kokeiluja. Newtonille binomikaava oli ennemminkin differentiaalilaskennan perusta kuin sen seuraus.

B. Vielä muutama kerroin

19*. Osoita, että jos p on alkuluku ja $0 < k < p$, niin $\binom{p}{k}$ on jaollinen p:llä.

20*. Johda kaava (8) käyttämällä numeron 11 polunlaskentamenetelmää.

21*. Laske

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

22*. Laske

$$1 \cdot 2 \cdot \binom{n}{2} - 2 \cdot 3 \cdot \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n (n-1)n \binom{n}{n}.$$

23*. Laske

$$\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}.$$

24*. Laske

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j}.$$

25*. Olkoon $S(n,\, k)$ Pascalin kolmion n:nnen rivin joka kolmannen alkion summa, alettuna k:nnesta luvusta ($k = 1,\, 2,\, 3$). Johda $S(n,\, k)$:n lauseke.

26*. *Fibonaccin lukujonon* (F_k) määrittelevät yhtälöt $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, kun $n \geq 2$. Osoita, että

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \cdots.$$

27*. Laske

$$\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \binom{2n}{5} + \ldots + \binom{2n}{2n-1}.$$

28*. Miltä näyttäisi binomikaavan vastine lausekkeen $(x + y + z)^n$ tapauksessa?

C. Tähdet kertovat

2. Kaavan (2) perusteella riittää todistaa kaavoista ensimmäinen oikeaksi. Käytetään induktiota k:n suhteen. Kaava on tosi, kun $k = 0$. Induktioaskel: jos kaava on tosi arvolla k, niin

$$\begin{aligned}&\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+k}{k} + \binom{n+k+1}{k+1}\\ &= \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 1^3 &= ((n+1)^3 - n^3) + (n^3 - (n-1)^3) + \cdots + (2^3 - 1^3) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)\\ &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n.\end{aligned}$$

Tästa ratkaistaan

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

ja

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n.$$

Numeron 3 mukaiset laskut ovat hiukan työläitä ja ne on tehtävä huolellisesti.

6. Numeroiden 3 ja 5 tuloksia hyödyntämällä saadaan

$$\int_0^1 x^p\,dx \approx \frac{1}{p+1},$$

kun $p = 1, 2, 3, 4$. Antamalla $n \to \infty$, nähdään, että $\approx$-merkki on tosiasiassa yhtäläisyysmerkki.

9.

$$\int_0^1 (1+x)^n\,dx = \Big/_0^1 \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

ja

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}.$$

10. Derivoidaan
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
kahdesti:
$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} (k^2-k) \binom{n}{k} x^{k-2}.$$
Sijoitetaan $x = 1$ ja otetaan huomioon (5). Sievennyksen jälkeen saadaan kysytyksi summaksi $2^{n-2}(n^2+n)$.

12. Origosta pisteeseen n, n on kaikkiaan $\binom{2n}{n}$ numerossa 11 määritellyn kaltaista polkua. Polkuja origosta pisteeseen $(k,\ n-k)$ on $\binom{n}{k}$ kappaletta ja polkuja pisteestä $(k,\ n-k)$ pisteeseen $(n,\ n)$ on yhtä monta kuin origosta pisteeseen $(n-k,\ k)$ eli $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ kappaletta. Polkuja origosta pisteeseen $(n,\ n)$ pisteen $(k,\ n-k)$ kautta on siis $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k}$ kappaletta. Jokainen polku origosta pisteeseen $(n,\ n)$ kulkee täsmälleen yhden pisteen $(k,\ n-k)$ kautta. Tästä seuraa väite.

17. Jos olisi $(1+x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1+2x+x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$, niin pitäisi olla $(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots)^3 = A^3+3A^2Bx+3(AB^2+A^2C)x^2+(3A^2D+3B^2C+B^3)x^3+\cdots = 1+2x+x^2$. Vertaamalla x:n potenssien kertoimia saadaan ratkaistua $A = 1$, $B = \dfrac{2}{3}$, $C = -\dfrac{1}{9}$, $D = \dfrac{4}{27}$ jne.

Jälkimmäisen kehitelmän muodostamiseen voisi käyttää geometrisen sarjan summan lauseketta:
$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1-x+x^2-x^3+\cdots)^2 = 1-2x+3x^2-4x^3+\cdots.$$

19. Alkuluku p ei ole luvun $k!$ eikä luvun $(p-k)!$ tekijä. Sitä ei siis voi supistaa osamäärästä $\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$.

20. Kaavan vasen puoli $\binom{n+k}{j}$ on numeron 11 mukaisten origosta pisteeseen $(n+k-j,\ j)$ johtavien polkujen määrä. Jokainen tällainen polku kulkee jonkin pisteistä $(n-r,\ r)$, $0 \le r \le j$ kautta. Polkuja origosta pisteeseen $(n-r,\ r)$ on $\binom{n}{r}$ kappaletta. Pisteestä $(n-r,\ r)$ pisteeseen $(n+k-j,\ j)$ johtavissa poluissa on $(n+k-j)-(n-r)+(j-r) = k$ askelta ja niistä $j-r$ on otettava ylöspäin. Tällaisia polkuja on siis $\binom{k}{j-r}$ kappaletta. Väite seuraa.

21.

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

22. Jos $n = 2$, summan arvo on 2. Jos $n \geq 3$, havaitaan, että lauseke on polynomin

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k = (1-x)^n$$

toinen derivaatta, kun $x = 1$. Summa on siis 0.

23. Summa on sama kuin

$$\int_0^1 (1-x)^n \, dx = \frac{1}{1+n}.$$

24.

$$(1+x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+y)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j}.$$

Kun sijoitetaan $x = y = 1$, saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} = 3^n.$$

Mutta

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{j}.$$

(Tämän kieltämättä epähavainnollinen asia perustuu kuitenkin suoraan osittelulakiin:

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{nk} b_{kj} = a_{n0} b_{00} + a_{n1} b_{10} + a_{n2} b_{20} + a_{n3} b_{30} + \cdots$$

$$a_{n1} b_{11} + a_{n2} b_{21} + a_{n3} b_{31} + a_{n4} b_{41} + \cdots + a_{n2} b_{22} + a_{n3} b_{32} + a_{n4} b_{42} + a_{n5} b_{52} + \cdots$$

$$= a_{n0} b_{00} + a_{n1}(b_{10} + b_{11}) + a_{n2}(b_{20} + b_{21} + b_{22}) + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_{nk} b_{kj}.)$$

25. Tässä on mukava ajatella laajennusta $\binom{n}{k} = 0$, kun $k < 0$ tai $k > n$ ja tulkita $S(n, p)$ lasketuksi kaikkien tällaisten kertoimien parissa. Silloin nähdään, että $S(n+1, 1) = S(n, 3) + S(n, 1)$, $S(n+1, 2) = S(n, 1) + S(n, 2)$ ja $S(n+1, 3) = S(n, 2) + S(n, 3)$. Lisäksi binomikertoimien summaominaisuuden (numero 7) perusteella $S(n, 1) + S(n, 2) + S(n, 3) = 2^n$. Koska $S(1, 1) = S(1, 2) = 1$ ja $S(1, 3) = 0$, on $S(2, 1) = 1$, $S(2, 2) = 2$ ja $S(2, 3) = 1$, $S(3, 1) = 2$, $S(3, 2) = 3$, $S(3, 3) = 3$, $S(4, 1) = 5$, $S(4, 2) = 5$, $S(4, 3) = 6$, $S(5, 1) = 11$, $S(5, 2) = 10$, $S(5, 3) = 11$, $S(6, 1) = 22$, $S(6, 2) = 21$, $S(6, 3) = 21$ ja $S(7, 1) = 43$, $S(7, 2) = 43$, $S(7, 3) = 42$ jne. Induktiolla voidaan todistaa, että luvuista $S(n, 1)$, $S(n, 2)$, $S(n, 3)$ aina kaksi on samaa ja yksi eroaa muista yhdellä yksiköllä; alaspäin, kun n on pariton ja ylöspäin, kun n on parillinen; asetelma toistuu kuuden jaksoissa.

26. Tehtävässä esiintyvä summa, olkoon se S_n, saa arvon 1, kun $n = 1$ ja $n = 2$. Binomikertoimien yhteenlaskukaavan perusteella

$$S_n + S_{n+1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots$$
$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots = S_{n+2}.$$

27. Koska $\binom{2n}{2p+1} = \binom{2n-1}{2p} + \binom{2n-1}{2p+1}$, kysytty summa on kaikkien binomikertoimien $\binom{2n-1}{p}$, $0 \le p \le 2n-1$ summa, eli 2^{2n-1}.

28. Kun $(x+y+z)^n$ kerrotaan auki, saadaan termejä, jotka ovat muotoa $x^k y^j z^(n-k-j)$. Ajatellaan tulon n:ää tekijää. Jokainen $\binom{n}{k}$:sta näiden osajoukosta tuotaa potenssin x^k lopuista $n-k$:sta tekijästä jokainen j:n valinta tuottaa tekijän y^j. Lopuista on otettava z. Termi $x^k y^j z^{n-k-j}$ saadaan kertolaskussa kaikkiaan

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} = \frac{n!}{k!j!(n-k-j)!}$$

kertaa. – Lukuja

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_j!}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n,$$

kutsutaan *multinomikertoimiksi*. Niitä merkitään joskus

$$\binom{n}{k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_j}.$$