Noora Nieminen

Hölderin epäyhtälö

Matematiikan aine
Turun yliopisto
4. huhtikuuta 2008

Sisältö

1 Johdanto

Tunnetuin ja ehkä eniten matematiikassa käytetty epäyhtälö on Cauchy-Schwarzin epäyhtälö. Epäyhtälöllä on monia sovellutuksia, mutta sen avulla on pystytty todistamaan myös monia perustavanlaatuisia tuloksia. Tällainen on esimerkiksi aritmeettis-geometrinen epäyhtälö.

Cauchy-Schwarzin epäyhtälö on erikoistapaus yleisemmästä Hölderin epäyhtälöstä: Cauchy-Schwarzin epäyhtälössä termien potenssit ovat molemmat suuruudeltaan $\frac{1}{2}$, kun taas Hölderin epäyhtälössä voivat esiintyä murtoluvut $\frac{1}{p}$ ja $\frac{1}{q}$, kun $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, joissa $p, q > 0$. Aineessa käsitellään kuitenkin Cauchy-Schwarzin epäyhtälö ensin, sillä Hölderin epäyhtälön todistuksessa on käytetty apuna aritmeettis-geometrista epäyhtälöä, jonka todistukseen viitettä antaa Cauchy-Schwarzin epäyhtälö.

Tämän aineen ensimmäinen luku käsittelee siis Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä. Kyseinen epäyhtälö on muotoiltu lauseeksi, joka todistetaan reaaliluvuille. Esimerkissä kolme käytetään lauseen tulosta sisätuloavaruudessa määritellylle tavalliselle normille. Lisäksi lauseen todistuksessa sivuutettu yhtäsuuruuden toteaminen on käsitelty tässä esimerkissä. Lopuksi todistetaan aritmeettis-geometrinen epäyhtälö omassa alaluvussaan. Tämän epäyhtälön todistamiseksi esitetään Jensenin epäyhtälö, joka todistetaan lemmana. Tämän jälkeen sovelletaan Jensenin epäyhtälöä sopivaan funktioon ja saadaan aritmeettis-geometrinen epäyhtälö todistetuksi.

Viimeisessä luvussa tarkastellaan Hölderin epäyhtälöä. Hölderin epäyhtälön diskreetille muodolle esitetään todistus. Integraalimuoto esitellään, mutta sille ei anneta todistusta (se olisi oleellisesti samankaltainen diskreetin version kanssa).

2 Cauchy-Schwarzin epäyhtälö

Cauchy-Schwarzin epäyhtälö soveltuu moniin eri tilanteisiin. Yksi yleisin käyttöalue on reaalilukujen joukko, jossa epäyhtälöä käytetään muun muassa sarjojen arvioinnissa ja suppenemistarkasteluissa. Myös integraaleille on oma epäyhtälönsä, joka on samanmuotoinen diskreetin muodon kanssa. Lisäksi normiavaruuksissa tämä epäyhtälö pätee, ja tavallisella normilla se palautuukin reaalilukujen vastaavaan epäyhtälöön.

2.1 Cauchy-Schwarzin epäyhtälön todistus

Lause 2.1. *Cauchy-Schwarzin epäyhtälö*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Todistus. Todistetaan epäyhtälö induktiolla. Selvästi arvolla $n = 1$ epäyhtälö pätee. Tarkastellaan seuraavaksi epäyhtälöä arvolla $n = 2$. Vasemmalta puolelta saadaan neliöön korotettuna

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2.$$

Tämän jälkeen huomataan, että

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \geq 0$$

joten

$$2a_1a_2b_1b_2 \leq a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$$

Näin ollen saadaan edelleen

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 \leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

joten n:n arvolla $n = 2$ epäyhtälö toteutuu.

Oletetaan nyt, että $n > 2$ ja tehdään induktio-oletus, jossa epäyhtälö on voimassa arvolla $n = k$, eli

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}.$$

Todistetaan induktioväite

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2}.$$

Kirjoitetaan vasemman puolen summa ensin muotoon

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}b_{k+1},$$

josta induktio-oletusta käyttämällä saadaan

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}b_{k+1} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2} + a_{k+1}b_{k+1}.$$

Edelleen käyttämällä epäyhtälöä

$$(a_1b_2 + a_2b_1)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

voidaan kirjoittaa

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2} + a_{k+1}b_{k+1} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2},$$

mikä todistaa induktioväitteen. Näin ollen epäyhtälö on todistettu oikeaksi.

□

Seuraavaksi esitetään todistuksetta muutamia Cauchy-Schwarzin epäyhtälön sovelluksia sekä esitetään vastaava epäyhtälö integraaleille.

Esimerkki 1. *Cauchy-Schwarzin epäyhtälön avulla voidaan todistaa, että jos sarjat* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ *ja* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ *suppenevat, niin myös sarja* $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i|$ *suppenee.*

Esimerkki 2. *Integraaleille Cauchy-Schwarzin epäyhtälö on muotoa*

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx.$$

Tämä epäyhtälö on voimassa funktioavaruudessa C[a,b], missä normi on määritelty integraalina $\|f\| = \int_a^b f(x)^2dx$

Esimerkki 3. *Määritellään tavallinen normi seuraavasti*

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

missä $\boldsymbol{x}$ *on vektori* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Lisäksi määritellään sisätulo vektoreille* $\boldsymbol{x}$ *ja* $\boldsymbol{y}$ *seuraavalla tavalla*

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Nyt voidaan kirjoittaa Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä apuna käyttäen

$$|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})| = |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})| \cdot |(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y})| = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|.$$

Epäyhtälössä yhtäsuuruus on voimassa, kun vektorit riippuvat lineaarisesti toisistaan.

2.2 Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistus

Cauchyn epäyhtälön todistuksessa käytettiin seuraavaa epäyhtälöä tapauksessa $i = 2$

$$2a_1a_2b_1b_2 \leq a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2,$$

josta jakamalla kahdella ja merkitsemällä $x = a_1b_2$ ja $y = a_2b_1$ saadaan epäyhtälö $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Jos nyt kirjoitetaan $x \mapsto \sqrt{x}$ ja $y \mapsto \sqrt{y}$, saadaan

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \tag{1}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, joka on arimeettis-geometrinen epäyhtälö n:n arvolla kaksi. Tätä epäyhtälöä käyttämällä saadaan edelleen

$$(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{4}} \leq \frac{\sqrt{x_1x_2}}{2} + \frac{\sqrt{x_3x_4}}{2} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

Näin ollen kaikki aritmeettis-geometrinen epäyhtälö on voimassa arvoille 2^k ja saadaan menettelemällä edellä kuvatulla tavalla k kertaa peräkkäin. Nyt on vielä todistettava epäyhtälö muille kuin kahden potensseille.

Epäyhtälö on todistettavissa helpommin, kun käytetään seuraavaksi esitettävää Jensenin epäyhtälöä tietylle reaaliarvoiselle funktiolle. Sitä varten esitetään Jensenin epäyhtälö ja sen todistus. Tätä varten määritellään ensin konveksi funktio.

Määritelmä 2.2. *Konveksi funktio*
Reaaliarvoinen funktio $f : C \to \mathbb{R}$ *on konveksi, jos jokaisella x,y, jotka kuuluvat määrittelyalueeseensa C, ja* $t \in [0,1]$ *pätee*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Funktio on konkaavi, jos funktio -f on konveksi.

Lemma 2.3. *Jensenin epäyhtälö (konveksille funktiolle)*
Olkoon f konveksi reaaliarvoinen funktio, luvut x_i *funktion määrittelyalueella ja luvut* α_i *positiivisia. Silloin*

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$$

Olettamalla lisäksi, että $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ *saadaan seuraavanlainen epäyhtälö*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i).$$

Todistus. Todistetaan Jensenin epäyhtälö olettaen, että
$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$. Tarkastellaan ensin n:n arvoa $n = 2$. Silloin väite on muotoa $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$. Väite seuraa suoraan funktion f konveksisuudesta, sillä nyt $\alpha + \beta = 1$, jolloin voidaan valita $t = \alpha, 1 - t = 1 - \alpha = \beta$.

Todistetaan yleinen väite induktiolla. Oletetaan, että väite pätee n:n arvolla $n = k$ ja todistetaan, että se on voimassa myös, kun $n = k + 1$. Kirjoitetaan aluksi summa muotoon

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i x_i\right) = f(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i + \alpha_{k+1}x_{k+1})$$

Jotta voitaisiin käyttää funktion f konveksisuutta, summalausekkeen eteen on saatava termi $1 - \alpha_{k+1}$, joten lavennetaan summa kyseisellä termillä[1].

[1] Vastaava nimittäjä voidaan viedä summan sisälle, sillä summauksen indeksi ei vaikuta tähän vakiotermiin.

Tämän jälkeen käytetään f:n konveksisuutta ja induktio-oletusta, jolloin saadaan seuraava epäyhtälöketju

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i\right) &= f\left(\alpha_{k+1}x_{k+1} + (1-\alpha_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{1-\alpha_{k+1}}\alpha_i x_i\right)\right) \\ &\leq \alpha_{k+1}f(x_{k+1}) + (1-\alpha_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\alpha_{k+1}}\alpha_i x_i\right) \\ &\leq \alpha_{k+1}f(x_{k+1}) + (1-\alpha_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\alpha_{k+1}}\alpha_i f(x_i) \\ &= \alpha_{k+1}f(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i f(x_i). \end{aligned}$$

Tämä todistaa Jensenin epäyhtälön.

□

Lause 2.4. *Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Todistus. Käytetään hyväksi Jensenin epäyhtälöä, ja sovelletaan sitä konveksiin[2] funktioon $f(x) = -\ln(x)$ ja valitsemalla jokainen $\alpha_i = 1$. Nyt saadaan

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} -\ln(x_i)}{n},$$

joka on ekvivalentti epäyhtälön

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right) \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}{n} = \frac{1}{n}\ln(x_1x_2\cdots x_n) = \ln(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}$$

kanssa. Koska luonnollinen logaritmi on aidosti kasvava, niin epäyhtälön suunta säilyy, ja tulokseksi saadaan aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

□

[2] Tämä voidaan helposti osoittaa muotoilemalla konveksisuusehto muotoon $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ ja käyttämällä logaritmin laskusääntöjä.

Samanlaisella todistuksella saadaan yleisempikin tulos, jos ei oleteta $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Merkitään $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, jolloin epäyhtälö saadaan muotoon

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha} > \sqrt[n]{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}}$$

3 Hölderin epäyhtälö

Ensimmäisen kerran Hölderin epäyhtälön esitti L.C. Rogers vuonna 1888. Vuotta myöhemmin saman tuloksen esitti Otto Hölder antaen tulokselleen erilaisen todistuksen kuin Rogers. Varsinaisesti epäyhtälön tärkeyden osoitti Frigyes Riesz, joka myös muotoili sen moderniin muotoonsa.

3.1 Hölderin epäyhtälön diskreetti muoto

Lause 3.1. *Hölderin epäyhtälö*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

kaikille ei-negatiivisille luvuille a_k, b_k ja luvuille $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Todistus. Sovelletaan edellä mainittua aritmeettis-geometrisen epäyhtälön yleistä muotoa n:n arvolla $n = 2$. Tällöin saadaan epäyhtälö

$$x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y^{\alpha+\beta}.$$

Kun nyt sijoitetaan $u = x^{\alpha}$,$v = y^{\beta}$,$p = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ ja $q = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, saadaan epäyhtälö kirjoitettua muotoon

$$\frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q} v^{\frac{1}{q}}$$

olettaen, että $x, y \leq 0$ ja $\alpha, \beta > 0$. Edelleen voidaan kirjoittaa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} a_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} b_k^q$$

Otetaan käyttöön apumuuttujat $\hat{a_k} = \frac{a_k}{\left\{\sum_{k=1}^n a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}}}$ ja $\hat{b_k} = \frac{b_k}{\left\{\sum_{k=1}^n b_k^q\right\}^{\frac{1}{q}}}$. Nämä ovat hyvin määriteltyjä, koska voidaan olettaa yleisyyttä menettämättä, että nimittäjien summalausekkeet ovat nollasta eroavat. Kun nyt sijoitetaan edellä määritellyt apumuuttujat epäyhtälöön saadaan

$$\sum_{k=1}^n \hat{a_k}\hat{b_k} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{\left\{\sum_{k=1}^n a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{k=1}^n b_k^q\right\}^{\frac{1}{q}}}$$

$$\leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^n \frac{a_k^p}{\sum_{k=1}^n a_k^p} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^n \frac{b_k^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Kun kerrotaan nimittäjä vielä toiselle puolelle, saadaan Hölderin epäyhtälö todistetuksi. □

Hölderin epäyhtälön integraalimuoto on sama kuin diskreetillä muodolla (sama huomattiin Cauchy-Schwarzin epäyhtälön tarkastelussakin). Hölderin epäyhtälö integraaleille on nimittäin seuraavanlainen

$$\int |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

4 Lopuksi

Aineen käsittely aloitettiin Cauchy-Schwarzin epäyhtälöllä, joka on yksi tunnetuimmista epäyhtälöistä. Tämä epäyhtälö antoi hieman apukeinoja aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistukseen, mutta varsinainen todistus nojautuu voimakkaampaan työkaluun, Jensenin epäyhtälöön. Aritmeettis-geometrista epäyhtälöä, tai sen yleistettyä versiota, käytetään Hölderin epäyhtälön todistuksessa. Vaikka nämä epäyhtälöt näyttävät kytkeytyvän tiiviisti toisiinsa, ne muodostavat yksinäänkin jo merkittävän perustan analyysille.

Kirjallisuutta

[1] Steele J. Michael: *The Cauchy-Schwarz Master Class - An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*. Cambridge University Press, the United States of America, 2004 .