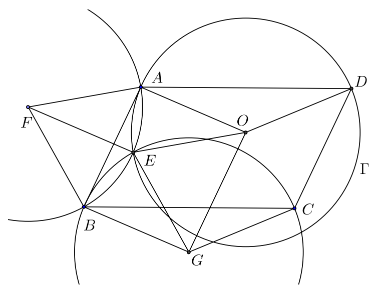
Pohjoismaisten matematiikkakilpailujen tehtävät ja ratkaisut 1987–94

87.1. *Yhdeksän erimaalaista lehtimiestä osallistuu lehdistötilaisuuuteen. Kukaan heistä ei osaa puhua useampaa kuin kolmea kieltä, ja jokaiset kaksi osaavat jotakin yhteistä kieltä. Osoita, että lehtimiehistä ainakin viisi osaa puhua samaa kieltä.*

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: mitkään viisi lehtimiestä eivät puhu yhteistä kieltä. Valitaan lehtimiehistä mielivaltaisesti yksi, nimeltään x. Jäljelle jäävät yhdeksän lehtimiestä jaetaan nyt ryhmiin sen mukaan, mitä kieltä he puhuvat x:n kanssa. Tehtävän oletusten perusteella ryhmiä on enintään kolme, ja joka ryhmässä on vastaoletuksen nojalla enintään kolme lehtimiestä. Ainoa tapa jakaa kahdeksan henkeä ryhmiin näiden ehtojen mukaan on sellainen, että kahdessa ryhmässä on kolme ja yhdessä kaksi jäsentä. Koska x on mielivaltainen, päätellään, että jokainen lehtimies osaa kolmea kieltä, ja kahdella näistä hän pystyy puhumaan kolmen muun kanssa. Tarkastellaan nyt jotakin neljän lehtimiehen joukkoa $M = \{x, y, x, t\}$, jonka jäsenet kaikki puhuvat kieltä K. Kukin näistä puhuu tasan kolmen M:ään kuulumattoman lehtimiehen kanssa jollain muulla kielellä. Oletetaan, että x käyttää kieltä X, y kieltä Y, z kieltä Z ja t kieltä T. Nämä kielet ovat kaikki keskenään erilaisia ja kielestä K eroavia, koska muutoin ainakin viisi henkeä puhuisi samaa kieltä. Koska M:ään kuulumattomia lehtimiehiä on 5, ainakin kahden heistä on puhuttava kolmea kielistä X, Y, Z ja T (tilanne on sama kuin sijoitettaessa 4×3 eriväristä palloa viiteen lokeroon niin, että mihinkään lokeroon ei tule kahta samanväristä palloa!). Olkoon u eräs tällainen; puhukoon u kieliä X, Y ja Z. Mutta silloin u ei voi puhua t:n kanssa mitään kieltä! Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi ja tehtävän väitteen oikeaksi.

87.2. *Olkoon $ABCD$ tason suunnikas. Piirretään kaksi R-säteistä ympyrää, toinen pisteiden A ja B kautta ja toinen pisteiden B ja C kautta. Olkoon E ympyröiden toinen leikkauspiste. Oletetaan, että E ei ole mikään suunnikkaan kärjistä. Osoita, että pisteiden A, D ja E kautta kulkevan ympyrän säde on myös R.*

Ratkaisu. Olkoot F ja G pisteiden A ja B sekä B ja C kautta kulkevien RŒsäteisten ympyröiden keskipisteet ja O sellainen piste, että $ABGO$ on suunnikas. Tällöin $\angle OAD = \angle GBC$, ja kolmiot OAD ja GBC ovat yhtenevät (sks). Koska $GB = GC = R$, pisteet A ja D ovat O-keskisellä R-säteisellä ympyrällä Γ. Nelikulmio $EFBG$ on vinoneliö, joten $EF \parallel GB \parallel OA$. Koska lisäksi $EF = OA = R$, niin $AFEO$ on suunnikas. Mutta tästä seuraa, että $OE = AF = R$, joten piste E on myös ympyrällä Γ.



87.3. *Olkoon f luonnollisten lukujen joukossa määritelty aidosti kasvava funktio, jonka arvot ovat luonnollisia lukuja ja joka toteuttaa ehdot $f(2) = a > 2$ ja $f(mn) = f(m)f(n)$ kaikilla luonnollisilla luvuilla m ja n. Määritä a:n pienin mahdollinen arvo.*

Ratkaisu. Selvästi $f(n) = n^2$ on eräs tehtävän ehdot toteuttava funktio. Pienin mahdollinen a on siis ≤ 4. Oletetaan, että $a = 3$. Induktiolla todistetaan helposti, että

$f(n^k) = f(n)^k$ kaikilla $k \geq 1$. Siispä

$$f(3)^4 = f(3^4) = f(81) > f(64) = f(2^6) = f(2)^6 = 3^6 = 27^2 > 25^2 = 5^4$$

ja

$$f(3)^8 = f(3^8) = f(6561) < f(8192) = f(2^{13}) = f(2)^{13} = 3^{13} < 6^8.$$

Täten $5 < f(3) < 6$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $f(3)$ on kokonaisluku. Siis $a = 4$.

87.4. *Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

Ratkaisu. Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisen epäyhtälön perusteella

$$3 = 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2}} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

eli

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}. \tag{1}$$

Toisaalta Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}. \tag{2}$$

Kun epäyhtälöt (1) ja (2) kerrotaan puolittain, saadaan tehtävän epäyhtälö.

88.1. *Positiivisella kokonaisluvulla n on seuraava ominaisuus: jos n:stä poistetaan kolme viimeistä numeroa, jää jäljelle luku $\sqrt[3]{n}$. Määritä n.*

Ratkaisu. Jos $x = \sqrt[3]{n}$ ja y, $0 \leq y \leq 1000$, on n:n kolmen viimeisen numeron muodostama luku, niin

$$x^3 = 1000x + y.$$

Siis $x^3 \geq 1000x$, $x^2 > 1000$ ja $x > 31$. Toisaalta $x^3 < 1000x + 1000$ eli $x(x^2 - 1000) < 1000$. Tämän epäyhtälön vasen puoli on kasvava x:n funktio, ja $x = 33$ ei toteuta epäyhtälöä. Siis $x < 33$. Koska x on kokonaisluku, $x = 32$ ja $n = 32^3 = 32768$.

88.2. *Olkoot a, b ja c nollasta eroavia reaalilukuja ja $a \geq b \geq c$. Osoita, että pätee epäyhtälö*

$$\frac{a^3 - c^3}{3} \geq abc\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a}\right).$$

Milloin on voimassa yhtäsuuruus?

Ratkaisu. Koska $c - b \le 0 \le a - b$, niin $(a-b)^3 \ge (c-b)^3$ eli

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \ge c^3 - 3bc^2 + 3b^2c - b^3.$$

Kun tämä sievennetään, saadaan heti

$$\frac{1}{3}(a^3 - c^3) \ge a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 = abc\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a}\right).$$

Riittävä yhtäsuuruusehto on $a = c$. Jos $a > c$, niin $(a-b)^3 > (c-b)^3$, ja myös väite-epäyhtälössä on aito erisuuruus. Siis $a = c$ on myös välttämätön yhtäsuuruusehto.

88.3. *Samakeskisten pallojen säteet ovat r ja R, missä $r < R$. Isomman pallon pinnalta pyritään valitsemaan pisteet A, B ja C siten, että kolmion ABC kaikki sivut sivuaisivat pienempää pallonpintaa. Osoita, että valinta on mahdollinen jos ja vain jos $R \le 2r$.*

Ratkaisu. Tasasivuisen kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipiste on kolmion keskijanojen leikkauspiste. Tästä seuraa, että sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteiden suhde on $1 : 2$. Jos toisaalta kolmion sisään ja ympäri piirretyt ympyrät ovat samankeskisiä, kolmion kulmien puolittajat ja kolmion sivujen keskinormaalit yhtyvät; tästä seuraa helposti, että kolmio on tasasivuinen. Jos ympyröiden säteet ovat r_1 ja $R_1 = 2r_1$, niin kolmion sivun pituus on $2\sqrt{R_1^2 - r_1^2}$. Jos nyt A, B ja C ovat tehtävän R-säteisen pallonpinnan Γ pisteitä ja AB, BC sekä CA sivuavat tehtävän r-säteistä pallonpintaa γ, niin taso ABC leikkaa Γ:n pitkin ABC:n ympäri piirrettyä R_1-säteistä ympyrää ja γ:n pitkin ABC:n sisään piirrettyä r_1-säteistä ympyrää. Molempien ympyröiden keskipiste on pallojen yhteisestä keskipisteestä tasolle ABC piirretyn normaalin kantapiste. Siten ABC on tasasivuinen, ja jos tason ABC etäisyys pallojen keskipisteestä on d, niin

$$2r_1 = 2\sqrt{r^2 - d^2} = R_1 = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Täten välttämätön ehto tehtävän valinnan mahdollisuudelle on $4r^2 - R^2 = 3d^2 \ge 0$ eli $2r \ge R$.

Olkoon sitten kääntäen $2r \ge R$. Silloin etäisyydellä

$$d = \sqrt{\frac{4r^2 - R^2}{3}}$$

pallojen keskipisteestä oleva taso leikkaa molemmat pallot pitkin samankeskisiä ympyröitä, joiden säteet ovat

$$r_1 = \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{3}}, \quad R_1 = 2\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{3}}.$$

Tehtävän vaatimukset täyttävät pisteet A, B ja C voidaan valita tältä R_1-säteiseltä ympyrältä niin, että ABC on tasasivuinen.

88.4. *Olkoon m_n funktion*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k$$

pienin arvo. Osoita, että $m_n \to \frac{1}{2}$, kun $n \to \infty$.

Ratkaisu. Kun $n > 1$, niin

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = 1 + x(1 + x^2 + \cdots) + x^2(1 + x^2 + \cdots) = 1 + x(1+x)\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}.$$

Tästä nähdään, että $f_n(x) \geq 1$, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 0$. Siis f_n saa pienimmän arvonsa välillä $]-1,\,0[$. Tällä välillä

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} > \frac{1}{1-x} > \frac{1}{2}.$$

Siis $m_n \geq \frac{1}{2}$. Toisaalta

$$m_n \leq f_n\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n+1}}{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Kun $n \to \infty$, niin epäyhtälön oikean puolen ensimmäinen yhteenlaskettava lähestyy raja-arvoa $\frac{1}{2}$. Jälkimmäisen yhteenlaskettavan osoittajan tekijä

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} = \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}}$$

lähestyy nollaa, koska $\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = e^{-1} < 1$. Siis $\lim_{n\to\infty} m_n = \frac{1}{2}$.

89.1. *Määritä alhaisinta mahdollista astetta oleva polynomi P jolla on seuraavat ominaisuudet:*
(a) P:n kertoimet ovat kokonaislukuja,
(b) P:n kaikki nollakohdat ovat kokonaislukuja,
(c) $P(0) = -1$,
(d) $P(3) = 128$.

Ratkaisu. Olkoon P:n asteluku n ja nollakohdat $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_m$. Silloin

$$P(x) = a(x - b_1)^{r_1}(x - b_2)^{r_2} \cdots (x - b_m)^{r_m},$$

missä $r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_m \geq 1$ ja a on kokonaisluku. Koska $P(0) = -1$, on

$$ab_1^{r_1} b_2^{r_2} \cdots b_m^{r_m}(-1)^n = -1.$$

Tämä on mahdollista vain, jos $|a| = 1$ ja $|b_j| = 1$ kaikilla $j = 1,\, 2,\, \ldots\, m$. Mutta tällöin

$$P(x) = a(x-1)^p(x+1)^{n-p}$$

ja $P(3) = a \cdot 2^p 2^{2n-2p} = 128 = 2^7$. Siis $2n - p = 7$. Koska $p \geq 0$ ja n ovat kokonaislukuja, pienin n, jolle tämä ehto voi toteutua, on 4; tällöin $p = 1$ ja $a = 1$. – On selvää, että polynomi $P(x) = (x-1)(x+1)^3$ toteuttaa asetetut vaatimukset.

89.2. *Tetraedrin kolmella sivutahkolla on kaikilla suora kulma niiden yhteisessä kärjessä. Näiden sivutahkojen alat ovat A, B ja C. Laske tetraedrin kokonaispinta-ala.*

Ratkaisu. Olkoon tetraedri $PQRS$ ja olkoon S se kärki, joka on yhteinen kolmelle suorakulmaiselle sivutahkolle; olkoon A tahkon PQS ala, B tahkon QRS ala ja C tahkon RPS ala. Merkitään X:llä tahkon QRS alaa. Jos SS' on kärjestä S (tahkolle PQR) piirretty korkeusjana ja jos $\angle RSS' = \alpha$, $\angle PSS' = \beta$ ja $\angle QSS' = \gamma$, niin suorakulmaisesta särmiöstä, jonka lävistäjä on SS', saadaan Pythagoraan lauseen avulla helposti

$$SS'^2 = (SS'\cos\alpha)^2 + (SS'\sin\alpha)^2 = (SS'\cos\alpha)^2 + (SS'\cos\beta)^2 + (SS'\cos\gamma)^2$$

eli (tunnettu kaava)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Koska α, β ja γ ovat myös tason PQR ja tasojen PQS, QRS ja RPS väliset kulmat, on $A = X\cos\alpha$, $B = X\cos\beta$ ja $C = X\cos\gamma$. Mutta tästä seuraa, että $X = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ja kysytty kokonaispinta-ala on $A + B + C + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

89.3. *Olkoon S kaikkien niiden suljetun välin $[-1, 1]$ pisteiden t joukko, joilla on se ominaisuus, että yhtälöillä $x_0 = t$, $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ määritellylle lukujonolle x_0, x_1, x_2, ... löytyy positiivinen kokonaisluku N siten, että $x_n = 1$ kaikilla $n \geq N$. Osoita, että joukossa S on äärettömän monta alkiota.*

Ratkaisu. Kaikki jonon (x_n) luvut kuuluvat väliin $[-1, 1]$. Kaikilla n voidaan valita (ei yksikäsitteinen) α_n siten, että $x_n = \cos\alpha_n$. Jos $x_n = \cos\alpha_n$, niin $x_{n+1} = 2\cos^2\alpha_n - 1 = \cos 2\alpha_n$. Luvuksi α_{n+1} voidaan siis valita $2\alpha_n$, ja edelleen luvuksi α_n luku $2^n\alpha_0$. Nyt $x_n = 1$ jos ja vain jos $\alpha_n = 2k\pi$ jollakin kokonaisluvulla n. Jokainen $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2^m}$ on tarpeeksi suurilla 2:n potensseilla kerrottuna muotoa $2k\pi$, joten jokainen $x_0 = \cos\dfrac{\pi}{2^m}$ synnyttää jonon (x_n), jossa kaikki luvut tietystä indeksistä alkaen ovat ykkösiä.

89.4. *Mille positiivisille kokonaisluvuille n pätee seuraava väite: jos a_1, a_2, ..., a_n ovat positiivisia kokonaislukuja, $a_k \leq n$ kaikilla k ja $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n$, niin on aina mahdollista valita a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_j} siten, että indeksit i_1, i_2, ..., i_j ovat eri lukuja ja $\sum_{k=1}^{j} a_{i_k} = n$?*

Ratkaisu. Jos n on pariton, väite ei päde. Vastaesimerkiksi riittää kokoelma, jossa $a_k = 2$ kaikilla k. Todistetaan induktiolla, että väite pätee kaikille parillisille positiivisille kokonaisluvuille $n = 2k$. Jos $k = 1$, niin $a_1 + a_2 = 4$ ja $1 \leq a_1, a_2 \leq 2$, joten on oltava $a_1 = a_2 = 2$. Kysytty valinta on esim. a_1. Oletetaan, että väite pätee aina $(2k-2)$:lle luvulle. Olkoot a_1, a_2, ..., a_{2k} positiivisia lukuja, $\leq 2k$, joiden summa on $4k$. Jos yksi luvuista on $2k$, asia on selvä. Jos lukujen joukossa on ainakin kaksi kakkosta, voidaan induktio-oletusta soveltaa niihin $2k-2$:een lukuun, jotka jäävät jäljelle, kun kaksi kakkosta poistetaan. Näiden lukujen summa on $4k-4$, joten lukujen joukosta löytyy kokoelma, jonka lukujen summa on $2k-2$. Kun tähän kokoelmaan liitetään toinen poistetuista kakkosista, saadaan haluttu kokoelma. Oletetaan sitten, että lukujen joukossa ei ole kakkosia. Jos luvuissa on x ykköstä, niissä on $2k - x$ lukua ≥ 3. Siis $x + 3(2k - x) \leq 4k$ eli $x \geq k$. Nyt $4k - x$ on luku, joka on $2k$:n ja $3k$:n välissä, se on useamman kuin yhden luvun summa, ja yhteenlaskettavat ovat $< 2k$. Voidaan siis valita luvut $a_i \geq 3$, joiden summa on k:n ja $2k$:n välissä. Kun näihin liitetään riittävä määrä ykkösiä, saadaan kokoelma, jonka lukujen summa on $2k$. Jos luvuissa on tasan yksi kakkonen, saadaan vastaavasti $x + 2 + 3(2k - x - 1) \leq 4k$, josta $2k - 1 \leq 2x$. Koska x on kokonaisluku, niin $k \leq x$. Päättelyä voidaan jatkaa samoin kuin edellisessä kohdassa.

90.1. *Olkoot m, n ja p parittomia positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että luku*

$$\sum_{k=1}^{(n-1)^p} k^m$$

on jaollinen n:llä.

Ratkaisu. Koska summan termien lukumäärä on tehtyjen oletusten perusteella parillinen, voidaan summa kirjoittaa muotoon

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)^p} \left(k^m + ((n-1)^p - k + 1)^m\right). \tag{1}$$

Koska m on pariton, jokaisen termin tekijänä on $k + (n-1)^p - k + 1 = (n-1)^p + 1$. Koska p on pariton, on vielä $(n-1)^p + 1 = (n-1)^p + 1^p$ jaollinen luvulla $(n-1) + 1 = n$. Siis n on muunnetun summan (1) jokaisen termin tekijä, joten summa on jaollinen n:llä.

90.2. *Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalilukuja. Osoita, että*

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}. \tag{1}$$

Milloin (1):ssä vallitsee yhtäsuuruus?

Ratkaisu. Jos $0 \leq x \leq 1$, niin $x^{3/2} \leq x$, ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $x = 0$ tai $x = 1$. Oletamme, että ainakin yksi $a_k \neq 0$. Asetetaan

$$x_k = \frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2}.$$

Silloin $0 \leq x_k \leq 1$ ja edellä sanotun perusteella on

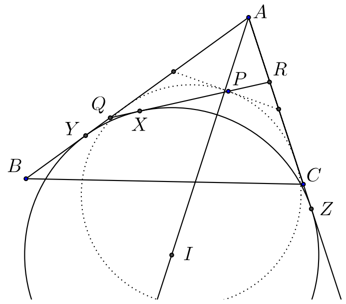
$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2}\right)^{3/2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2} = 1.$$

Siis

$$\sum_{k=1}^n a_k^3 \leq \left(\sum_{j_1}^n a_j^2\right)^{3/2},$$

eli väitetty epäyhtälö. Yhtäsuuruus vallitsee, jos tasan yksi x_k on yksi ja muut ovat nollia, ts. jos tasan yksi $a_k > 0$ ja muut ovat nollia.

90.3. *Olkoon ABC kolmio ja P piste ABC:n sisällä. Oletetaan, että suora l, joka kulkee pisteen P kautta, mutta ei pisteen A kautta, leikkaa AB:n ja AC:n (tai niiden B:n ja C:n yli ulottuvat jatkeet) pisteissä Q ja R. Etsi sellainen suora l, että kolmion AQR piiri on mahdollisimman pieni.*



Ratkaisu. Olkoon

$$s = \frac{1}{2}(AR + RQ + QA).$$

Olkoon c se ympyrä, joka sivuaa QR:ää ja AR:n ja AQ:n jatkeita; olkoon I c:n keskipiste. Silloin $\angle QAI = \angle IAR = \frac{1}{2}\alpha$. Sivutkoon c RQ:ta, AQ:n jatketta ja AR:n jatketta pisteissä X, Y ja Z. Selvästikin

$$AQ + QX = AY = AZ = AR + RZ,$$

joten

$$AZ = AI \cos \frac{1}{2}\alpha = s.$$

Siten s ja kysytty piiri on pienin, kun AI on pienin. Tämä tapahtuu silloin, kun $X = P$. Kysytty suora on sen ympyrän P:hen asetettu tangentti, joka kulkee P:n kautta ja sivuaa AB:tä ja AC:tä. – Edellä määritelty ympyrä c on kolmion AQR kärkeä vastaava sivuympyrä, ja tunnetusti kolmion piiri on yhtä pitkä kuin kärjestä sivuamispisteisiin piirrettyjen tangentin osien summa. Koska P on kuuluttava kolmion sivuun QR, P:n on oltava ympyrän c ulkopuolella. Tangenttijanat AY ja AZ ovat pienimmät, kun ympyrä on mahdollisimman lähellä kärkeä A. Tämä tapahtuu silloin, kun P on ympyrän kehällä.

90.4. *Positiivisille kokonaisluvuille on sallittu kolme operaatiota f, g and h: $f(n) = 10n$, $g(n) = 10n + 4$ and $h(2n) = n$, ts. luvun loppuun saa kirjoittaa nollan tai nelosen ja parillisen luvun saa jakaa kahdella. Todista: jokaisen positiivisen kokonaisluvun voi konstruoida aloittamalla luvusta 4 ja suorittamalla äärellinen määrä operaatioita f, g ja h jossakin järjestyksessä.*

Ratkaisu. Kaikki parittomat luvut n ovat muotoa $h(2n)$. Osoitetaan, että kaikki parilliset luvut saadaan luvusta 4 operaatioiden f, g ja h avulla. Tähän riittää, kun osoitetaan, että sopivasti valittu jono käänteisoperaatioita $F = f^{-1}$, $G = g^{-1}$ ja $H = h^{-1}$ tuottaa jokaisesta parillisesta luvusta pienemmän parillisen luvun tai luvun neljä. Operaatiota F voidaan soveltaa nollaan päättyviin lukuihin, operaatiota G neloseen päättyviin lukuihin, ja $H(n) = 2n$. Saadaan

$$\begin{aligned} H(F(10n)) &= 2n, \\ G(H(10n+2)) &= 2n, \quad n \geq 1, \\ H(2) &= 4, \end{aligned}$$

$$H(G(10n+4)) = 2n,$$
$$G(H(H(10n+6))) = 4n+2,$$
$$G(H(H(H(10n+8)))) = 8n+6.$$

Kun näitä askelia toistetaan äärellinen määrä, päästään aina viimein neloseen.

91.1. *Määritä luvun*

$$2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \cdots + 2^{5^{1991}}$$

kaksi viimeistä numeroa, kun luku kirjoitetaan kymmenjärjestelmässä.

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että kaikki luvut 2^{5^k} ovat muotoa $100p+32$. Tämä nähdään induktiolla: kun $k=1$ asia on selvä ($2^5 = 32$). Oletetaan, että $2^{5^k} = 100p+32$. Silloin

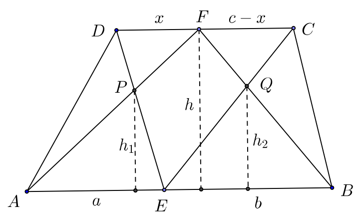
$$2^{5^{k+1}} = \left(2^{5^k}\right)^5 = (100p+32)^5 = 100q + 32^5$$

ja

$$(30+2)^5 = 30^5 + 5\cdot 30^4\cdot 2 + 10\cdot 30^3\cdot 4 + 10\cdot 30^2\cdot 8 + 5\cdot 30\cdot 16 + 32 = 100r + 32.$$

Tehtävän summan kaksi viimeistä numeroa ovat siis samat kuin luvun $1991\cdot 32$ kaksi viimeistä numeroa eli samat kuin luvun $91\cdot 32 = 2912$ kaksi viimeistä numeroa eli 12.

91.2. *Puolisuunnikkaassa $ABCD$ sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaiset ja E on sivun AB kiinteä piste. Määritä sivulta CD piste F niin, että kolmioiden ABF ja CDE leikkauksen pinta-ala on mahdollisimman suuri.*



Ratkaisu. Kolmion ABF ala ei riipu pisteen F valinnasta. Merkitään DE:n ja AF:n leikkauspistettä P:llä ja BF:n ja CE:n leikkauspistettä Q:lla. Kysytty ala maksimoituu, kun kolmioiden AEP ja EBQ yhteenlaskettu ala minimoituu. Merkitään vielä puolisuunnikkaan korkeutta h:lla, kolmioiden AEP ja EBQ korkeuksia h_1:llä ja h_2:lla sekä janojen AE, EB ja CD sekä DF pituuksia a:lla, b:llä, c:llä ja x:llä. Koska kolmiot AEP ja FDP ovat yhdenmuotoiset ja samoin kolmiot BQE ja FQC, saadaan

$$\frac{h_1}{a} = \frac{h-h_1}{x} \qquad \text{ja} \qquad \frac{h_2}{b} = \frac{h-h_2}{c-x}.$$

Näistä ratkaistaan

$$h_1 = \frac{ha}{a+x} \qquad \text{ja} \qquad h_2 = \frac{hb}{b+c-x}.$$

Kolmioiden yhteenlaskettu ala on

$$\frac{h}{2}\left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+c-x}\right).$$

Tehtävä on siten minimoida funktio

$$f(x) = \frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+c-x},$$

kun $0 \le x \le c$. Lasketaan derivaatta

$$f'(x) = -\frac{a^2}{(a+x)^2} + \frac{b^2}{(b+c-x)^2}$$

ja toinen derivaatta

$$f''(x) = \frac{2a^2}{(a+x)^3} + \frac{2b^2}{(b+c-x)^3}.$$

Koska toinen derivaatta on positiivinen, kun $0 \le x \le c$, ensimmäinen derivaatta kasvaa aidosti. $f'(x) = 0$ vain, kun $x = \dfrac{ac}{a+b} = x_0$. Tästä seuraa, että f vähenee, kun $x < x_0$, ja kasvaa, kun $x > x_0$, joten f:n minimi saavutetaan vain, kun $x = x_0$ eli kun

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{a+b}.$$

Tämä merkitsee, että tehtävän ratkaisee se piste F, joka jakaa sivun DC samassa suhteessa kuin E jakaa sivun AB.

91.3. *Osoita, että*

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$$

kaikilla $n \ge 2$.

Ratkaisu. Koska

$$\frac{1}{j^2} < \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j},$$

niin

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j^2} &< \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{k-1}.\end{aligned}$$

Tästä saadaan arvolla $k = 6$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{5} = \frac{2389}{3600} < \frac{2}{3}.$$

91.4. *Olkoon $f(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi. Oletetaan, että on olemassa positiivinen kokonaisluku k ja k peräkkäistä kokonaislukua n, $n+1$, $\ldots$, $n+k-1$ siten, että mikään luvuista $f(n)$, $f(n+1)$, $\ldots$, $f(n+k-1)$ ei ole jaollinen k:lla. Osoita, että $f(x)$:n nollakohdat eivät ole kokonaislukuja.*

Ratkaisu. Olkoon $f(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_d$. Oletetaan, että f:llä on jokin kokonainen nollakohta m. Silloin $f(x) = (x-m)g(x)$, missä g on polynomi. Jos $g(x) = b_0x^{d-1} + b_1x^{d-2} + \cdots + b_{d-1}$, niin $a_0 = b_0$ ja $a_k = b_k - mb_{k-1}$, $1 \le k \le d-1$. Siten b_0 on kokonaisluku ja myös muut b_k:t ovat kokonaislukuja. Koska $f(j)$ on jaoton k:lla k:lla peräkkäisellä j:n arvolla, niin k peräkkäistä kokonaislukua $j-m$ ($j = n, n+1, \ldots, n+k-1$) ovat myös k:lla jaottomia. Tämä on ristiriita, sillä k:sta peräkkäisestä kokonaisluvun joukossa on aina tasan yksi k:lla jaollinen! f:llä ei voi olla kokonaislukunollakohtaa.

92.1. *Määritä kaikki ne yhtä suuremmat reaaliluvut x, y ja z, jotka toteuttavat yhtälön*

$$x + y + z + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} + \frac{3}{z-1} = 2\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2}\right).$$

Ratkaisu. Tutkitaan arvoilla $t > 1$ määriteltyä funktiota f,

$$f(t) = t + \frac{3}{t-1} \equiv 2\sqrt{t+2}.$$

Tehtävän yhtälö on muotoa

$$f(x) + f(y) + f(z) = 0.$$

Muotoillaan f:n lauseketta:

$$f(t) = \frac{1}{t-1}\left(t^2 - t + 3 - 2(t-1)\sqrt{t+2}\right)$$

$$= \frac{1}{t-1}\left(t^2 - 2t + 1 + \left(\sqrt{t+2}\right)^2 - 2(t-1)\sqrt{t+2}\right) = \frac{1}{t-1}\left(t - 1 - \sqrt{t+2}\right)^2.$$

Siis $f(t) \ge 0$ ja $f(t) = 0$ vain, kun $t > 1$ ja

$$t - 1 = \sqrt{t+2}$$

eli

$$t^2 - 3t - 1 = 0.$$

Ainoa ehdon täyttävä t on

$$t = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Tehtävän yhtälö voi siten toteutua ainoastaan silloin, kun

$$x = y = z = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

92.2. *Olkoon $n > 1$ kokonaisluku ja olkoot a_1, a_2, ..., a_n n eri kokonaislukua. Todista, että polynomi*

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 1$$

ei ole jaollinen millään kokonaislukukertoimisella polynomilla, jonka aste on suurempi kuin nolla, mutta pienempi kuin n, ja jonka korkeimman x:n potenssin kerroin on 1.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: olkoon $g(x)$ astetta m, $1 \le m < n$ oleva kokonaislukukertoiminen polynomi, jossa x:n kerroin on 1 ja olkoon

$$f(x) = g(x)h(x),$$

missä $h(x)$ on polynomi. Olkoot

$$\begin{aligned} g(x) &= x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0, \\ h(x) &= x^{n-m} + c_{n-m-1}x^{n-m-1} + \cdots + c_1x + c_0. \end{aligned}$$

Jos kaikki kertoimet c_j eivät olisi kokonaislukuja, voitaisiin löytää suurin indeksi $j = k$, jolle c_k ei olisi kokonaisluku. Mutta silloin f:n astetta $k + m$ olevan termin kerroin – joka on kokonaisluku – olisi $c_k + b_{m-1}c_{k+1} + b_{m-2}c_{k+2} + \cdots + b_{k-m}$. Koska summan yhteenlaskettavat ovat ensimmäistä lukuun ottamatta kokonaislukuja, summa ei ole kokonaisluku. Ristiriita osoittaa, että $h(x)$ on välttämättä myös kokonaislukukertoiminen polynomi. Koska

$$f(a_i) = g(a_i)h(a_i) = -1,$$

kun $i = 1, 2, \ldots n$ ja sekä $g(a_i)$:t että $f(a_i)$:t ovat kokonaislukuja, on aina $g(a_i) = -f(a_i) = \pm 1$ ja siis $g(a_i) + h(a_i) = 0$. Mutta tämä merkitsee, että polynomilla $g(x) + h(x)$, jonka aste on $< n$, on n nollakohtaa. Polynomin täytyy olla identtisesti $= 0$ eli $g(x) = -h(x)$. Siis

$$f(x) = -g(x)^2 \le 0$$

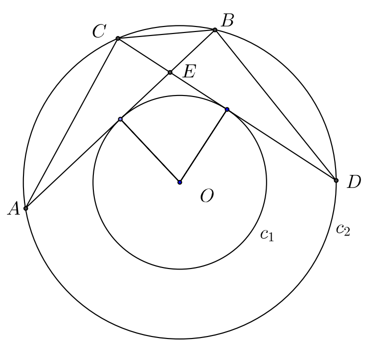
Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska $f(x) \to +\infty$, kun $x \to +\infty$.

92.3. *Todista, että kaikista kolmioista, joiden sisään piirretyn ympyrän säde on 1, pienin piiri on tasasivuisella kolmiolla.*

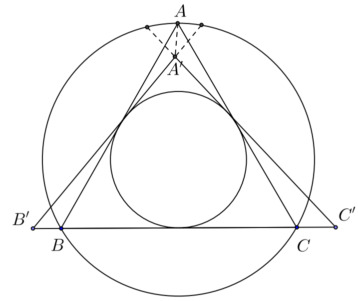
Ratkaisu. Jos kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on 1, niin kolmion piiri p ja ala A toteuttavat yhtälön $2A = p$. (Jaa kolmio kolmeksi kolmioksi, joiden yhteinen kärki on sisään piirretyn ympyrän keskipiste.) Tehtävänä on siis todistaa, että kolmioista, joiden sisään piirretyn ympyrän säde on 1, alaltaan pienin on tasasivuinen kolmio.

Väitteen todistus perustuu seuraavaan aputulokseen:

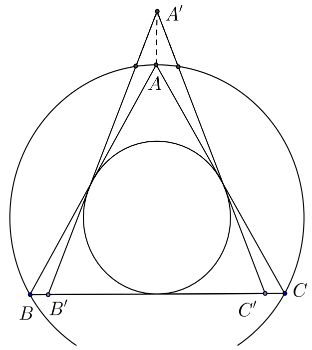
Olkoot c_1 ja c_2 kaksi samakeskistä ympyrää. Oletetaan, että ympyrän c_2 jänteet AB ja CD leikkaavat pisteessä E ja sivuavat molemmat ympyrää c_1. Oletetaan, että C on lyhemmällä kaarista AB. Silloin jänteiden ja ympyrän c_2 kaarien rajoittamilla kuvioilla AEC ja DEB ovat sama pinta-ala.



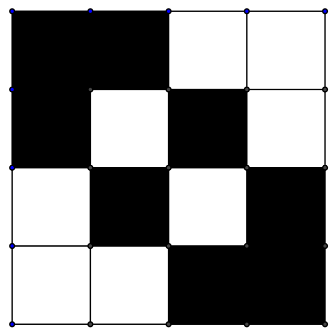
Todistus. Koska AB ja CD ovat ympyrän c_2 jänteitä, jotka ovat yhtä etäällä ympyrän keskipisteestä O, ne ovat yhtä pitkät. Myös kaaret $\overset{\frown}{AB}$ ja $\overset{\frown}{CD}$ ovat yhtä pitkät. Siis myös kaaret $\overset{\frown}{AC}$ ja $\overset{\frown}{BD}$ ovat yhtä pitkät, joten $AC = BD$. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle CAB = \angle CDB$. Kolmiot ABC ja DCB ovat siis yhteneviä (sks). Koska kolmiot AEC ja DEB saadaan poistamalla kolmio BCE näistä yhtenevistä kolmioista, kolmioilla AEC ja DEB on sama ala. Yhtä pitkiä jänteitä AC ja BD vastaavat ympyrän segmentit ovat sama-alaisia, joten aputulos on todistettu.



Olkoon nyt ABC tasasivuinen kolmio, jonka sisään piirretyn ympyrän säde on 1 ja $A'B'C'$ mielivaltainen kolmio, jolla on sama sisään piirretty ympyrä. Olkoon c_2 kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Jos $A'B'C'$ ei ole tasasivuinen, ainakin yksi sen kärki on ympyrän c_2 ulkopuolella ja ainakin yksi kärki on ympyrän c_2 sisäpuolella. Kiertämällä kolmioita ja tarpeen mukaan nimeämällä uudelleen kärjet päästään tilanteeseen, jossa suorat BC ja $B'C'$ yhtyvät ja joko BC on $B'C'$:n osa tai $B'C'$ on BC:n osa. Kummassakin tapauksessa $A'B'C'$:n ala saadaan ABC:n alasta vähentämällä kaksi palaa, jotka ovat pienempiä kuin eräät aputuloksessa käsitellyn muotoiset "kolmiot" Δ_1 ja Δ_2 ja lisäämällä vastaavasti kaksi palaa, jotka molemmat ovat suurempia kuin aputuloksen mukaiset Δ_1:n ja Δ_2:n kanssa yhtenevät "kolmiot" Δ_1' ja Δ_2'.



92.4. *Peterillä on paljon samankokoisia neliöitä, joista osa on mustia, osa valkeita. Peter haluaa koota neliöistään ison neliön, jonka sivun pituus on n pikkuneliön sivua, siten, isossa neliössä ei ole yhtään sellaista pikkuneliöistä muodostuvaa suorakaidetta, jonka kaikki kärkineliöt olisivat samanvärisiä. Kuinka suuren neliön Peter pystyy tekemään?*



Ratkaisu. Kun $n = 4$, konstruktio onnistuu esimerkiksi kuvan osoittamalla tavalla. Tarkastellaan sitten tapausta $n = 5$: Voidaan olettaa, että 25:stä neliöstä ainakin 13 on mustia. Jos näistä viisi on jollakin vaakarivillä, lopuista kahdeksasta ainakin kaksi on samalla vaakarivillä. Näin syntyy suorakaide, jonka kaikki kärjet ovat mustia. Oletetaan, että mustista neliöistä neljä on jollakin vaakarivillä. Lopuista yhdeksästä täytyy joidenkin kolmen olla samalla vaakarivillä. Näistä ainakin kahden on oltava sellaisilla pystyriveillä, joilla on myös jotkin kaksi neljästä saman vaakarivin mustasta. Jos missään vaakarivissä ei ole enempää kuin kolme mustaa neliötä, on ainakin kolmella vaakarivillä oltava tasan kolme mustaa neliötä. Olkoot nämä rivit A, B ja C. Kutsutaan niitä pystyrivejä, joissa A-vaakarivin mustat neliöt ovat *mustiksi* ja loppuja kahta pystyriviä *valkoisiksi* pystyriveiksi. Jos B- tai C-rivillä on mustilla pystyriveillä ainakin kaksi mustaa neliötä, syntyy mustakärkinen suorakaide. Jos kummallakaan vaakariveistä B ja C ei mustilla pystyriveillä ole kuin enintään yksi musta neliö, ovat molempien vaakarivien valkeisiin pystyriveihin kuuluvat neliöt mustia. Taas syntyy mustakärkinen suorakaide!

Johtopäätös: $n = 4$ on suurin mahdollinen n.

93.1. *Olkoon F kaikilla x, $0 \le x \le 1$, määritelty kasvava reaalilukuarvoinen funktio, joka toteuttaa ehdot*

(i) $\quad F\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{F(x)}{2}$

(ii) $\quad F(1-x) = 1 - F(x)$.

Määritä $F\left(\dfrac{173}{1993}\right)$ *ja* $F\left(\dfrac{1}{13}\right)$.

Ratkaisu. Ehdon (i) perusteella $F(0) = \dfrac{1}{2}F(0)$, joten $F(0) = 0$. Ehdon (ii) perusteella $F(1) = 1 - F(0) = 1$. Edelleen $F\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ ja $F\left(\dfrac{2}{3}\right) = 1 - F\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$. Koska F on kasvava, tämä on mahdollista vain, jos $F(x) = \dfrac{1}{2}$ kaikilla $x \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right]$. Kysytyistä funktionarvoista ensimmäisen määrittämiseksi käytetään ehtoja (i) ja (ii) siten, että funktion argumentti saadaan yksikön keskimmäiseen kolmannekseen:

$$
\begin{aligned}
F\left(\frac{173}{1993}\right) &= \frac{1}{2}F\left(\frac{519}{1993}\right) = \frac{1}{4}F\left(\frac{1557}{1993}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - F\left(\frac{436}{1993}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}F\left(\frac{1308}{1993}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}.
\end{aligned}
$$

Jälkimmäisen arvon laskemiseksi käytetään ehtoja (i) ja (ii) sellaisen yhtälön muodostamiseksi, josta tuntematon voidaan ratkaista.

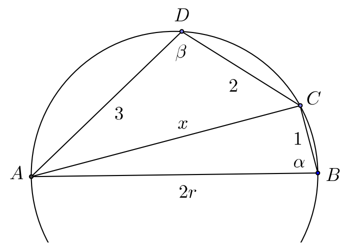
$$
\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{13}\right) &= 1 - F\left(\frac{12}{13}\right) = 1 - 2F\left(\frac{4}{13}\right) = 1 - 2\left(1 - F\left(\frac{9}{13}\right)\right) \\
&= 2F\left(\frac{9}{13}\right) - 1 = 4F\left(\frac{3}{13}\right) - 1 = 8F\left(\frac{1}{13}\right) - 1.
\end{aligned}
$$

Tästä ratkaistaan

$$
F\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{1}{7}.
$$

93.2. *r-säteisen ympyrän sisään on piirretty kuusikulmio. Kuusikulmion sivuista kaksi on pituudeltaan 1, kaksi pituudeltaan 2 ja viimeiset kaksi pituudeltaan 3. Osoita, että r toteuttaa yhtälön*

$$
2r^3 - 7r - 3 = 0.
$$



Ratkaisu. Kuusikulmion sivujen järjestystä voidaan tarvittaessa vaihtaa niin, että sivut, joiden pituus on 1, 2 ja 3 tulevat vierekkäin. Näitä sivuja vastaavien kaarien pituuksien summa on tasan puolet ympyrän kehän pituudesta. Tarkastellaan siis jännenelikulmiota $ABCD$, missä $AB = 2r$ on ympyrän halkaisija, $BC = 1$, $CD = 2$ ja $DA = 3$. Olkoon vielä $AC = x$. Kulmat $\angle ABC = \alpha$ ja $\angle CDA = \beta$ ovat vieruskulmia. Siis $\cos\alpha = -\cos\beta$. Thaleen lauseen nojalla kolmio ABC on suorakulmainen, joten $x^2 = 4r^2 - 1$ ja $\cos\alpha = \dfrac{1}{2r}$. Kolmiosta ACD puolestaan saadaan kosinilauseen perusteella

$$x^2 = 3^2 + 2^2 - 12\cos\beta = 13 + 12\cos\alpha.$$

Kun tähän sijoitetaan edeltä x^2 ja $\cos\alpha$ r:n funktioina ja sievennetään, saadaan väite.

93.3. *Etsi kaikki yhtälöryhmän*

$$\begin{cases} s(x) + s(y) = x \\ x + y + s(z) = z \\ s(x) + s(y) + s(z) = y - 4 \end{cases}$$

ratkaisut, kun x, y ja z ovat positiivisia kokonaislukuja ja $s(x)$, $s(y)$ ja $s(z)$ ovat x:n, y:n ja z:n kymmenjärjestelmäesityksien numeroiden lukumäärät.

Ratkaisu. Ensimmäisen yhtälön perusteella $x \geq 2$ ja ensimmäisen sekä kolmannen perusteella

$$s(z) = y - x - 4. \tag{1}$$

Täten $y \geq x + 5 \geq 7$. Kun (1) sijoitetaan toiseen yhtälöön, saadaan $z = 2y - 4$. Nyt $s(z) \leq s(2y) \leq s(y) + 1$ ja $s(x) \leq s(y)$ joten viimeisen yhtälön perusteella $3s(y) + 1 \geq y - 4$ eli

$$y \leq 3s(y) + 5.$$

Koska

$$10^{s(y)-1} \leq y,$$

tämä epäyhtälö voi toteutua vain, jos $s(y) = 1$ tai $s(y) = 2$. Jos $s(y) = 1$, niin $y \leq 3+5 = 8$, joten $y = 7$ tai $y = 8$. Jos olisi $y = 7$, olisi $x = 2$ ja $z = 10$. Silloin olisi $x + y + s(z) = 2 + 7 + 2 = 9 \neq z$. Siis jos $s(y) = 1$, niin $y = 8$. Kolmikko $(x, y, z) = (2, 8, 12)$ toteuttaa kaikki yhtälöt. Jos $s(y) = 2$, niin $y = 10$ tai $y = 11$. Jos $y = 10$, niin $z = 16$ ja $x \leq 5$. Ei voi olla $s(x) + s(y) + s(z) = y \equiv 4 = 6$. Jos $y = 11$, niin $x \leq 6$ ja $z = 18$. Nytkään kolmas tehtävän yhtälö ei toteudu. (2, 8, 12) on ainoa ratkaisu.

93.4. *Merkitään $T(n)$:llä positiivisen kokonaisluvun n kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summaa.*

a) Etsi positiiviluku N, jolle $T(k \cdot N)$ on parillinen kaikilla k, $1 \le k \le 1992$, mutta $T(1993 \cdot N)$ on pariton.

b) Osoita, että ei ole olemassa positiivista kokonaislukua N, jolle $T(k \cdot N)$ olisi parillinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.

Ratkaisu. a) Jos s on n-numeroinen luku ja $m = 10^{n+r}s + s$, niin $T(km)$ on parillinen ainakin niin kauan, kun $ks < 10^{n+r}$, koska luvussa km esiintyvät samat numerot kahdesti (ja välissä on mahdollisesti nollia). Valitaan $N = 5018300050183$ eli $s = 50183$. Nyt $1992 \cdot s = 99964536$, joten $T(kN)$ on parillinen kaikilla $k \le 1992$. Mutta $1993 \cdot s = 100014719$, $1993 \cdot N = 10001472000017719$, ja $T(1993 \cdot N)$ on pariton.

b) Oletetaan, että N on sellainen positiivinen kokonaisluku, että $T(kN)$ on parillinen kaikilla k. Tarkastellaan ensin tapausta $N = 2m$. Nyt $T(km) = T(10km) = T(5kN)$. Viimeinen luku on parillinen kaikilla k, joten $T(km)$ on parillinen kaikilla k. Toistamalla tarpeen mukaan päättely, todetaan, että on olemassa pariton N, jolle $T(kN)$ on parillinen kaikilla k. Oletetaan sitten, että $N = 10r + 5$. Silloin $T(k(2r+1)) = T(10k(2r+1)) = T(2kN)$, joten myös luvulla $\dfrac{N}{5} = 2r+1$ on väitetty ominaisuus. Päättelyä tarpeen mukaan toistamalla voidaan rajoittua tapaukseen, jossa N on pariton ja jaoton viidellä. Olkoon nyt $N = 10r + 9$,

$$N = a\underbrace{x\ldots x}_{k\ \text{kpl}}b9.$$

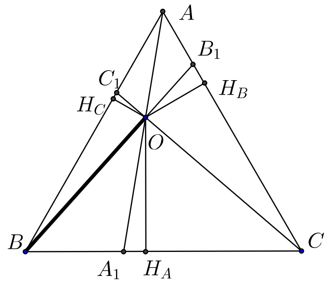
Jos $b < 9$, niin luvun $10^{n+2}N + N$ esitys on $ax\ldots x(b+1)(a-1)x\ldots x9$, joten $T(10^{n+2}N + N) = 2T(N) - 9$ eli pariton. Jos N loppuu kahteen yhdeksikköön, niin $11N$ loppuu numeroihin 89, ja siihen voidaan soveltaa edellistä päättelyä. Jos N päättyy ykköseen, kolmoseen tai seitsemään, niin $9N$, $3N$ tai $7N$ päättyy 9:ään, ja edellistä päättelyä voidaan taas soveltaa.

94.1. *Olkoon O sisäpiste tasasivuisessa kolmiossa ABC, jonka sivun pituus on a. Suorat AO, BO ja CO leikkaavat kolmion sivut pisteissä A_1, B_1 ja C_1. Todista, että*

$$|OA_1| + |OB_1| + |OC_1| < a.$$

Ratkaisu. Olkoot H_A, H_B ja H_C pisteen O kohtisuorat projektiot sivuilla BC, CA ja AB. Koska $60° < \angle OA_1B < 120°$, niin

$$OH_A = OA_1 \sin(\angle OA_1B) > |OA_1|\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Vastaavasti

$$OH_B > |OB_1\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ja} \quad OH_C > OC_1\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Jos kolmion ABC ala lausutaan tavallisella kaavalla ja toisaalta osakolmioiden ABO, BCO ja CAO (joilla kaikilla on sama kanta a) alojen summana, saadaan

$$OH_A + OH_B + OH_C = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Väite seuraa heti.

94.2. *Kutsumme äärellistä joukkoa S tason kokonaislukukoordinaattisia pisteitä kaksinaapurijoukoksi, jos jokaista S:n pistettä $(p,\, q)$ kohden tasan kaksi pisteistä $(p+1,\, q)$, $(p,\, q+1)$, $(p-1,\, q)$, $(p,\, q-1)$ kuuluu S:ään. Millä kokonaisluvuilla n on olemassa kaksinaapurijoukko, jossa on tasan n pistettä?*

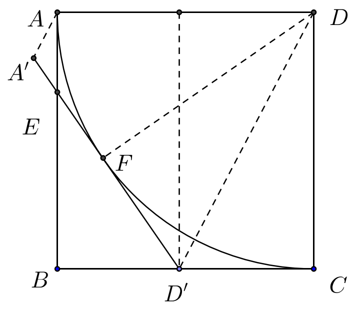
Ratkaisu. Selvästi pisteet $(0,\, 0)$, $(1,\, 0)$, $(1,\, 1)$, $(0,\, 1)$ muodostavat kaksinaapurijoukon (2NJ). Myös jokaisella parillisella luvulla $n = 2k \geq 8$ joukko $S = \{(0,\, 0),\, \ldots,\, (k-2,\, 0)$, $(k-2,\, 1),\, (k-2,\, 2),\, \ldots,\, (0,\, 2),\, (0,\, 1)\}$ on 2NJ. Osoitetaan, että muilla n:n arvoilla ei ole olemassa 2NJ:ja.

Olkoon S 2NJ ja olkoon S:ssä n pistettä. Liitetään jokainen S:n piste kahteen naapuriinsa yksikköjanalla. Syntyvien kuvioiden tulee olla suljettuja murtoviivoja, koska päättyvän murtoviivan pää olisi piste, jolla on vain yksi naapuri. Murtoviivoissa on yhteensä n janaa (joka pisteestä lähtee kaksi janaa, joten pisteistä lähtee yhteensä $2n$ janaa; jos lähtevät janat lasketaan, tulee jokainen jana lasketuksi kahdesti). Murtoviivoissa olevien janojen määrä on parillinen: kun murtoviiva kierretään ympäri, on otettava yhtä monta askelta vasemmalle kuin oikealle ja yhtä monta alas kuin ylös). Siis n on välttämättä parillinen. Selvästi $n \neq 2$.

On vielä näytettävä, että $n \neq 6$. Voidaan olettaa, että $(0,\, 0) \in S$. Nyt on symmetriasyistä olennaisesti vain kaksi mahdollisuutta: a) $(-1,\, 0) \in S$ ja $(1,\, 0) \in S$ tai b) $(1,\, 0) \in S$ ja $(0,\, 1) \in S$. Tapauksessa a) on $(0,\, 1) \notin S$ ja $(0,\, -1) \notin S$. Koska S:n pisteet $(-1,\, 0)$, $(0,\, 0)$ ja $(1,\, 0)$ kuuluvat johonkin suljettuun murtoviivaan, tämän murtoviivan on kierrettävä joko pisteen $(0,\, 1)$ tai $(0,\, -1)$ ympäri. Kummassakin tapauksessa murtoviivassa on ainakin 8 janaa. Tapauksessa b) $(1,\, 1) \notin S$ (S:n tulisi koostua murtoviivasta, jossa on neljä janaa ja murtoviivasta, jossa on kaksi janaa; viimemainittu on mahdoton)ja $(-1,\, 0) \notin S$, $(0,\, -1) \notin S$. Pisteet $(1,\, 0)$, $(0,\, 0)$ ja $(0,\, 1)$ sisältävä murtoviiva joko kiertää pisteen $(1,\, 1)$, jolloin siinä on ainakin 8 janaa, tai kiertää pisteet $(-1,\, 0)$ ja $(0,\, -1)$, jolloin siinä on ainakin 10 janaa. Siis $n = 6$ johtaa aina ristiriitaan.

94.3. *Neliönmuotoinen paperinpala $ABCD$ taitetaan taivuttamalla kärki D sivun BC pisteen D' päälle. Oletetaan, että AD siirtyy janan $A'D'$ päälle, ja että $A'D'$ leikkaa AB:n pisteessä E. Todista, että kolmion EBD' piiri on puolet neliön piiristä.*

Ratkaisu. Taitos synnyttää tasakylkisen puolisuunnikkaan $ADD'A'$. Symmetrian perusteella kärjen D kohtisuora etäisyys sivusta $A'D'$ on sama kuin kärjen D' kohtisuora etäisyys sivusta AD eli sama kuin neliön sivu a. Suora $A'D'$ on siten DŒkeskisen aŒsäteisen ympyrän tangentti, samoin kuin suorat AB ja BC. Jos ympyrän ja $A'D'$:n sivuamispiste on F, niin $AE = EF$ ja $FD' = D'C$. Siis



$$AB+BC = AE+EB+BD'+D'C = ED'+EB+BD',$$

eli väite.

94.4. *Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $n < 200$, joille $n^2 + (n+1)^2$ on kokonaisluvun neliö.*

Ratkaisu. Etsitään yhtälön

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+p)^2, \quad p \geq 2,$$

kokonaislukuratkaisut. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan mukaan

$$n = p - 1 + \sqrt{2p(p-1)} \geq 2(p-1).$$

Koska $n < 200$, $p \leq 100$. Lisäksi luvun $2p(p-1)$ on oltava kokonaisluvun neliö. Jos p on pariton, luvuilla p ja $2(p-1)$ ei voi olla yhteisiä tekijöitä. Silloin sekä p että $2(p-1)$ ovat neliölukuja. Ainoat mahdollisuudet ovat $p = 9$, $p = 25$, $p = 49$ ja $p = 81$. Vastaavat luvut $2(p-1)$ ovat 16, 48, 96 ja 160. Näistä vain 16 on neliö. Saadaan yksi ratkaisu $n = 8 + \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 8} = 20$, $20^2 + 21^2 = 841 = 29^2$. Jos p on parillinen, niin luvuilla $2p$ ja $p-1$ ei ole yhteisiä tekijöitä, joten molemmat ovat neliöitä. Luvun $2p$ mahdolliset arvot ovat 4, 16, 36, 64, 100, 144 ja 196. Vastaavat luvun $p \equiv 1$ arvot ovat 1, 7, 31, 49, 71 ja 97. Saadaan kaksi ratkaisua $n = 1 + 2 = 3$, $3^2 + 4^2 = 5^2$ ja $n = 49 + 70 = 119$, $119^2 + 120^2 = 169^2$.