33. pohjoismainen matematiikkakilpailu 2019

Ratkaisut

1. *Kutsutaan (eri) positiivisten kokonaislukujen joukkoa* merkitykselliseksi*, jos sen jokaisen äärellisen epätyhjän osajoukon aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo ovat molemmat kokonaislukuja.*

a) *Onko olemassa merkityksellistä 2019 luvun joukkoa?*

b) *Onko olemassa ääretöntä merkityksellistä joukkoa?*

Huomautus: Epänegatiivisten lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geometrisen keskiarvon *määritellään olevan* $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

Ratkaisu:

a) **Vastaus:** Kyllä, tällainen joukko on olemassa.

Kutsutaan positiivisten kokonaislukujen joukkoa *aritmeettisesti merkitykselliseksi*, jos sen jokaisen äärellisen epätyhjän osajoukon aritmeettinen keskiarvo on kokonaisluku. Määritellään vastaavalla tavalla, mitä tarkoittaa *geometrisesti merkityksellinen* joukko. Joukko on siis merkityksellinen, jos ja vain jos se on sekä aritmeettisesti että geometrisesti merkityksellinen.

Kun $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ ja $r \in \mathbb{Z}_+$, merkitään

$$rA = \{ra \mid a \in A\} \text{ ja } r^A = \{r^a \mid a \in A\}.$$

Merkityksellisen 2019 luvun joukon olemassaolo perustuu seuraavaksi esitettäviin havaintoihin, jotka puetaan jonoksi väitteitä. Olkoot $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ äärellinen epätyhjä joukko ja $r \in \mathbb{Z}_+$.

Väite 1. Jos A on aritmeettisesti merkityksellinen, niin r^A on geometrisesti merkityksellinen.

Jos nimittäin $S \subseteq A$ on äärellinen ja epätyhjä, niin

$$\sqrt[|S|]{\prod_{s \in S} r^s} = \sqrt[|S|]{r^{\sum_{s \in S} s}} = r^{\sum_{s \in S} s/|S|} \in \mathbb{Z}_+,$$

sillä A:n aritmeettisesta merkityksellisyydestä seuraa $\sum_{s \in S} s/|S| \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

Väite 2. Jos A on geometrisesti merkityksellinen, niin myös rA on geometrisesti merkityksellinen.

Kun $S \subseteq A$ on äärellinen ja epätyhjä, niin

$$\sqrt[|S|]{\prod_{s \in S} rs} = r \sqrt[|S|]{\prod_{s \in S} s} \in \mathbb{Z}_+,$$

kunhan A on geometrisesti merkityksellinen. $\square$

Väite 3. Jokaista äärellistä epätyhjää joukkoa $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ vastaa sellainen vain joukon A koosta riippuva $c \in \mathbb{Z}_+$, että cA on aritmeettisesti merkityksellinen.

Merkitään nimittäin $n = |A| \in \mathbb{Z}_+$ ja valitaan $c = n! \in \mathbb{Z}_+$. Kun $S \subseteq A$ on epätyhjä, niin $k = |S| \mid c$, joten joukon cS aritmeettinen keskiarvo

$$\Big(\sum_{s \in S} cs\Big)/|S| = \frac{c}{k} \sum_{s \in S} s$$

on välttämättä kokonaisluku. Siis A on aritmeettisesti merkityksellinen. $\square$

Lähdetään nyt liikkeelle mielivaltaisesta 2019 positiivisen kokonaisluvun joukosta A, esimerkiksi $A = \{1, \ldots, 2019\}$. Väitteen 3 mukaan on olemassa sellainen $c \in \mathbb{Z}+$, että cA on algebrallisesti merkityksellinen. Väitteen 2 nojalla $2^{cA} \subseteq \mathbb{Z}_+$ on siten geometrisesti merkityksellinen ja selvästi 2019 luvun joukko. Väitteen 1 mukaan $c2^{cA}$ säilyy geometrisesti merkityksellisenä, ja väitteen 3 nojalla se on myös aritmeettisesti merkityksellinen. Siis $c2^{cA}$ on 2019 positiivisen kokonaisluvun merkityksellinen joukko. $\square$

b) **Vastaus:** Ei, ääretöntä merkityksellistä joukkoa ei ole olemassa.

Oletetaan nimittäin vastoin väitettä, että S on ääretön merkityksellinen joukko. Olkoot $a, b \in S$ sen kaksi pienintä alkiota. Kiinnitetään mielivaltaisesti $n \in \mathbb{N}$, jolle $n > \max\{a, b\} \geq 2$, ja $n-1$-alkioinen osajoukko $C \subseteq S \setminus \{a, b\}$. Koska S on algebrallisesti merkityksellinen, sekä joukon $C \cup \{a\}$ että joukon $C \cup \{b\}$ alkioiden algebrallinen keskiarvo on kokonaisluku, ts.

$$\frac{u+a}{n} \in \mathbb{Z} \text{ ja } \frac{u+b}{n} \in \mathbb{Z},$$

missä $u = \sum_{c \in C} c$. Siis $u + a \equiv 0 \equiv u + b \pmod{n}$, mistä seuraa $a \equiv b \pmod{n}$. Koska toisaalta $0 < a < n$ ja $0 < b < n$, niin tästä seuraa $a = b$, mikä on ristiriidassa alkioiden a ja b valinnan kanssa. $\square$

2. *Olkoot a, b ja c suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet, missä $c > a$ ja $c > b$. Osoita, että*

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} \leq \sqrt{2} + 2.$$

Ratkaisu: Tiedetään, että c on suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus sekä a ja b kateettien pituudet, joten Pythagoraan lauseen nojalla $c^2 = a^+ b^2$. Koska

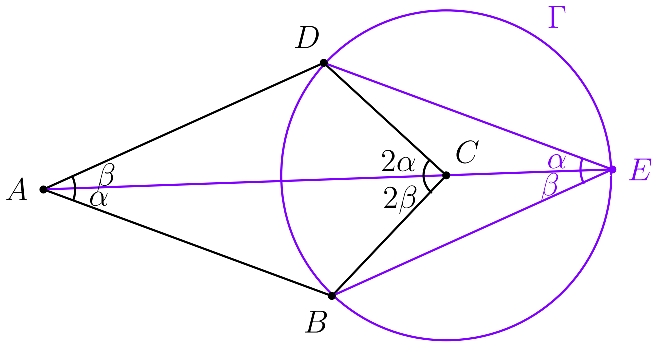
$$\begin{aligned}
c^3 - a^3 - b^3 &= c^3 - a^3 - b(c^2 - a^2) = (c-a)(c^2 + ac + a^2) - b(c-a)(c+a) \\
&= (c-a)\big(c^2 + ac + a^2 - b(c+a)\big) = (c-a)\big(c(c+a)c + c^2 - b^2 - b(c+a)\big) \\
&= (c-a)\big((c-b)(c+a)c + (c-b)(c+b)\big) = (c-a)(c-b)(c+a+c+b) \\
&= (c-a)(c-b)(2c+a+b),
\end{aligned}$$

niin
$$\frac{c^3-a^3-b^3}{c(c-a)(c-b)} = \frac{2c+a+b}{c} = 2+\frac{a+b}{c}.$$
Siis
$$\begin{aligned}
&3 < \frac{c^3-a^3-b^3}{c(c-a)(c-b)} \leq \sqrt{2}+2\\
\iff\ &3 < 2+\frac{a+b}{c} \leq \sqrt{2}+2\\
\iff\ &1 < \frac{a+b}{c} \leq \sqrt{2}.\\
\iff\ &c < a+b \leq c\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

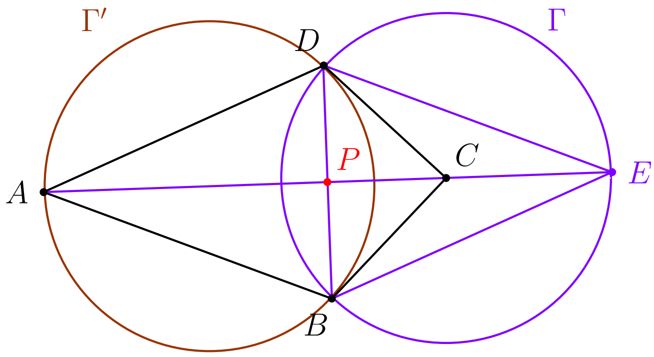
Viimeisen rivin kaksoisepäyhtälön vasen puoli on tietenkin kolmioepäyhtälö tiukassa muodossa, joten se on voimassa. Oikean puolen todistamiseksi huomataan, että
$$(a+b)^2 \leq (a+b)^2+(a-b)^2 = a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2 = 2(a^2+b^2) = 2c^2 = (c\sqrt{2})^2,$$
joten $a+b \leq \sqrt{2}c$, sillä $a+b>0$ ja $c\sqrt{2}>0$. $\square$

3. *Nelikulmiolle $ABCD$ pätee $\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle CAD$ ja $|CB| = |CD|$. Osoita, että $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD$.*

Ratkaisu: [Kuten Olli Järviniemellä.] Merkitään $\alpha = \sphericalangle CAB$ ja $\beta = \sphericalangle CAD$, jolloin oletuksista seuraa $\sphericalangle ACD = 2\alpha$ ja $\sphericalangle ACB = 2\beta$. Olkoon Γ C-keskinen ympyrä, joka kulkee pisteen B kautta. Koska $|CB| = |CD|$, kulkee Γ myös pisteen D kautta. Merkitään E:llä suoran AC ja ympyrän Γ sitä leikkauspistettä, joka on nelikulmion $ABCD$ ulkopuolella. Kehäkulmalauseen nojalla $\sphericalangle AED = \frac{1}{2}\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha = \alpha$ ja $\sphericalangle BEA = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle BCA = \beta$. Siis $\sphericalangle DAE = \beta = \sphericalangle AEB$ ja $\sphericalangle BAE = \alpha = \sphericalangle AED$, joten $AD \parallel BE$ ja $AB \parallel DE$. Siis $ABED$ on suunnikas.



Kun kolmion BED ympärysympyrä Γ peilataan tämän suunnikkaan keskipisteen suhteen, se kuvautuu kolmion ABD ympärysympyräksi Γ'. Huomataan, että suora AC puolittaa molemmat ympyrät.



Ympyröiden Γ ja Γ' leikkauspisteiden kautta kulkeva suora BD (radikaaliakselin erikoistapaus) on kohtisuorassa näiden ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevan suoran AE kanssa. Olkoon P suorien AE ja BD leikkauspiste. Koska $BD \perp AE$ ja suunnikkaan $ABED$ lävistäjät puolittavat toisensa, ovat kolmiot APD, BPA, EPB ja DPE keskenään yhteneviä. Tämä on mahdollista vain, jos $|AB| = |BE| = |ED| = |DA|$. Siis $ABED$ on neljäkäs. Koska neljäkkäässä lävistäjät ovat kulmanpuolittajia, saadaan $\alpha = \beta$ eli $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD$. $\square$

4. *Olkoon n kokonaisluku, jolle $n \geq 3$, ja oletetaan, että säännöllisen $4n+1$-kulmion kärjistä $2n$ on väritetty. Osoita, että välttämättä on olemassa kolme väritettyä kärkeä, jotka muodostavat tasakylkisen kolmion.*

Ratkaisu: Olkoot tarkasteltavan säännöllisen monikulmion kärjet $P_0, \ldots, P_{4n}$ positiiviseen kiertosuuntaan lueteltuna. Merkitään myös kaikilla $i \in \mathbb{Z}$ symbolilla P_i sitä yksikäsitteistä kärkeä P_t, jolle $t \equiv i \pmod{4n+1}$ ja $0 \leq t < 4n+1$. Siis kaikilla $i, j \in \mathbb{Z}$ pätee $P_i = P_j$, jos ja vain jos $i \equiv j \pmod{4n+1}$. Huomataan myös, että kaikilla $i, u \in \mathbb{Z}$, missä $u \not\equiv 0 \pmod{4n+1}$, kolmio $P_{i-u}P_iP_{i+1}$ on tasakylkinen ($P_{i-u} \neq P_{i+u}$, sillä $i + u - (i - u) = 2u \not\equiv 0 \pmod{4n+1}$).

Voidaan olettaa, että P_0 on väritetty. Jos jollakin $i \in \mathbb{Z}_+$ sekä P_i että P_{-i} ovat väritetyt, niin $P_{-i}P_0P_i$ on tasakylkinen kolmio, jonka kaikki kolme kärkeä on väritetty. Oletetaan jatkossa, että tällaista väritettyä kolmiota ei ole. Kun muita kärkiä kuin P_0:aa tarkastellaan pareina $\{P_{-i}, P_i\}$, missä $i \in \{0, \ldots, 2n\}$, havaitaan oletuksen merkitsevän, että kussakin $2n$ parista korkeintaan toinen on väritetty. Koska väritettyjä kärkiä on yhteensä $2n$ ja P_0 on väritetty, niin täsmälleen yksi pari $\{P_{-k}, P_k\}$, missä $k \in \mathbb{Z}$, $0 < k \leq 2n$, jää siis kokonaan värittämättä.

Oletetaan nyt, että jollakin $u \in \mathbb{Z}_+$ kärkien joukolle

$$\mathcal{P}_u = \{P_{-4u}, P_{-2u}, P_{-u}, P_0, P_u, P_{2u}, P_{4u}\} \tag{$*$}$$

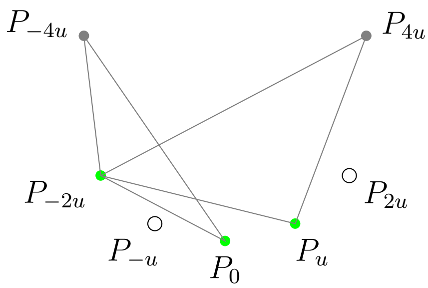
pätee, että

$$|\mathcal{P}_u| = 7 \tag{1}$$

eli ylärivillä luetellut kärjet ovat kaikki eri kärkiä ja että

$$P_k \notin \mathcal{P}_u. \tag{2}$$

Tässä siis $k \in \mathbb{Z}_+$ on värittämättömään pariin viittaava indeksi. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että P_u on väritetty mutta P_{-u} ei. Jos P_{2u} on väritetty, niin $P_0P_uP_{2u}$ on väritetty tasakylkinen kolmio; oletetaan siis, että P_{2u} ei ole väritetty mutta P_{-2u} on. Jos nyt P_{4u} on väritetty, niin $P_{-2u}P_uP_{4u}$ on väritetty tasakylkinen kolmio, jos taas P_{-4u} on väritetty, niin $P_{-4u}P_{-2u}P_0$ on väritetty tasakylkinen kolmio.



Riittää siis osoittaa, että mainitunlainen u on olemassa. Tarkastellaan joukkoja $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ ja $\mathcal{P}_3$ sekä osoitetaan, että näille ehto 1 on voimassa. Äärellisen monta poikkeusta lukuun ottamatta tämä seuraa siitä, että kaavassa $(*)$ indeksit ovat itseisarvoltaan pienimpiä mahdollisia eli $4u < (4n+1)/2$. Koska $4 < 6{,}5 = (4 \cdot 3 + 1)/2 \leq (4n+1)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, niin $\mathcal{P}_1$ siis toteuttaa aina ehdon 1. Tapauksessa $u = 2$ voidaan vedota myös siihen, että $\mathrm{syt}(2, 4n+1) = 1$, joten

$$P_{2i} = P_{2j} \iff 2i \equiv 2j \pmod{4n+1} \iff i \equiv j \pmod{4n+1} \iff P_i = P_j.$$

Siten $\mathcal{P}_2$ toteuttaa ehdon, koska $\mathcal{P}_1$ toteuttaa sen. Tapauksessa $u = 3$ ehto $4u < (4n+1)/2$ toteutuu, kun $n \geq 6$, sillä $12 < 25/2$. Jäljelle jäävissä kolmessa tapauksessa kongruenssit $12 = 4u \equiv -1 \pmod{13}$, $12 \equiv -5 \pmod{17}$ ja $12 \equiv -9 \pmod{21}$ osoittavat, että $P_{12} = P_{-1}$ tai $P_{12} = P_{-5}$ tahi $P_{12} = P_{-9}$, joten $P_{12} \notin \mathcal{P}_3 \setminus \{P_{12}, P_{-12}\}$. Koska muut indeksit ovat itseisarvoltaan pienimpiä mahdollisia, ehto 1 on jälleen voimassa.

Ehdon 2 toteuttamiseksi määritetään leikkaus $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$. Ensiksi saadaan

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \{P_{-4}, P_{-2}, P_0, P_2, P_4\}$$

Sen perusteella, mitä on aiemmin laskettu, huomataan, että $P_{12} \notin \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, ja vastaavasti $P_{-12} \notin \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Siis

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{P_{-4}, P_{-2}, P_0, P_2, P_4\} \cap \{P_{-6}, P_{-3}, P_0, P_3, P_{-6}\} = \{P_0\}.$$

Tästä seuraa tietenkin $P_k \notin \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$, joten $P_k \notin P_1$ tai $P_k \notin P_2$ tai $P_k \notin P_3$. Siis ehdot 1 ja 2 toteutuu jollakin arvoista $u = 1$, $u = 2$ tai $u = 3$, mistä seuraa väite. $\square$