30. Pohjoismainen matematiikkakilpailu 5. 4. 2016

Tehtävien ratkaisuja

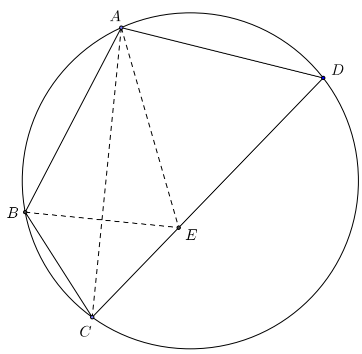
1. *Määritä kaikki ei-negatiivisten kokonaislukujen jonot* $a_1, \ldots, a_{2016}$*, joissa kaikki jäsenet ovat enintään* 2016 *ja joissa* $(i+j) \mid (ia_i + ja_j)$ *kaikilla* $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$.

Ratkaisu. Selvästi kaikki vakiojonot, $a_i = a$ kaikilla i, missä a on mikä hyvänsä välin $[0, 2016]$ kokonaisluku, toteuttavat tehtävän ehdon. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole.

Olkoon (a_i) jono, joka toteuttaa tehtävän ehdon. Koska $ia_i + ja_j - (i+j)a_j$ on jaollinen luvulla $i+j$, myös $i(a_i - a_j)$ on jaollinen tällä luvulla. Erityisesti $2k-1$ on tekijä luvussa $k(a_k - a_{k-1})$. Mutta luvuilla k ja $2k-1$ ei ole yhteisiä tekijöitä, joten $2k-1$ on luvun $a_k - a_{k-1}$ tekijä. Kosta a_k ja a_k ovat välin $[0, 2016]$ kokonaislukuja, $|a_k - a_{k-1}| \leq 2016$. Jos $2k - 1 \geq 2017$ eli $k \geq 1009$, on oltava $a_k - a_{k-1} = 0$. Siis välttämättä $a_{1008} = a_{1009} = \ldots = a_{2016}$. Olkoon sitten $i \leq 1007$. Tarkastellaan peräkkäisiä lukuja $2017 - i$, $2017 - (i-1)$, $\ldots$, $2017 - 1 = 2016$. Jokin näistä, sanokaamme m, on i:n monikerta. Silloin ainakin toinen luvuista $m \pm 1$ kuuluu samaan peräkkäisten i:n luvun joukkoon. Tällä luvulla, olkoon se j, ja i:llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Silloin ei myöskään luvuilla $i + j$ ja i ole yhteisiä tekijöitä. Mutta $i(a_i - a_j)$ on jaollinen $i + j$:llä. Siis $a_i - a_j$ on jaollinen $i+j$:llä. Mutta $i + j \geq i + 2017 - i = 2017$. Samoin kuin edellä, todetaan, että $a_i - a_j = 0$. Koska $j > 1008$, $a_j = a_{2016}$. Siis myös $a_i = a_{2016}$. Tehtävän ehdon toteuttava lukujono on vakiojono.

2. *Olkoon* $ABCD$ *jännenelikulmio (ympyrän sisään piirretty nelikulmio), jossa* $AB = AD$ *ja* $AB + BC = CD$*. Määritä* $\angle CDA$.

Ratkaisu. Osoitetaan, että $\angle CDA = 60°$. Valitaan janalta CD sellainen piste E, että $DE = AD$. Silloin $CE = CD - AD = CD - AB = BC$, joten CEB on tasakylkinen kolmio. Koska nyt $AB = AD$, niin $\angle BCA = \angle ACD$. Puolisuora CA on siis kulman $\angle BCD = \angle BCE$ puolittaja. Tasakylkisen kolmion huippukulman puolittaja on kantasivun keskinormaali. Piste A on siis janan BE keskinormaalilla, joten $AE = AB = AD = DE$. Näin ollen kolmio AED is on tasasivuinen kolmio, ja väite seuraa.



2. ratkaisu. Olkoon $\angle CDA = \alpha$, $AB = AD = a$, $BC = b$. Silloin $CD = a + b$. Koska $ABCD$ on jännenelikulmio, $\angle ABC = 180° - \alpha$. Tiedetään, että $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Lasketaan kosinilauseen avulla AC^2 kolmioista ABC ja ACD ja merkitään saadut lausekkeet yhtä suuriksi. Saadaan

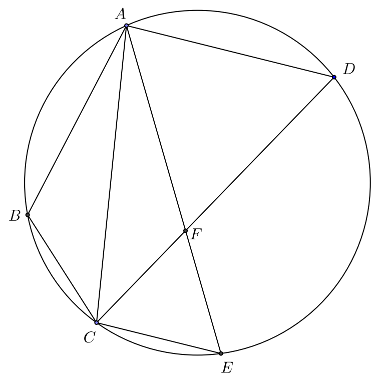
$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = a^2 + (a+b)^2 + 2a(a+b)\cos\alpha.$$

Tämä sievenee heti muotoon

$$a^2 + 2ab = (4ab + 2a^2)\cos\alpha,$$

josta $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ ja $\alpha = 60°$.

3. ratkaisu. Valitaan ympärysympyrältä, toiselta puolelta suoraa CD kuin B, piste E, jolle $CE = CB$. Leikatkoon AE CD:n pisteessä F. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle BAC = \angle CAE$ ja $\angle BCA = \angle ACD$. Kolmiot BCA ja FCA ovat yhteneviä (ksk). Siis $BC = CF$ ja $FD = CD - CF = CD - BC = BA$. Mutta edelleen $AF = AB$. Koska myös $AD = AB$, kolmio AFD on tasasivuinen ja $\angle CDF = 60°$.



3. *Etsi kaikki luvut $a \in \mathbb{R}$, joille on olemassa funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdot*

(i) $f(f(x)) = f(x) + x$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(f(x) - x) = f(x) + ax$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Ehdon (i) perusteella $x = f(f(x)) - f(x)$ ja siis $f(x) = f(f(f(x)) - f(x))$. Ehdon (ii) perusteella edelleen $f(f(f(x)) - f(x)) = f(f(x)) - af(x)$. Siis, kun vielä käytetään ehtoa (1), $(1+a)f(x) = f(f(x)) = f(x) + x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Jos olisi $a = 0$, olisi $x = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siis $a \neq 0$, ja $f(x) = -\dfrac{x}{a}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Jotta ratkaisu toteuttaisi ehdon (i), on oltava

$$f(f(x)) = f\left(-\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a^2} = f(x) + x = -\frac{x}{a} + x$$

kaikilla x. Tämä merkitsee, että a:n on toteutettava yhtälö $a^2 - a - 1 = 0$, eli on oltava

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Jotta (ii) toteutuisi, oltava

$$f(x) + ax = -\frac{x}{a} + ax = f(f(x) - x) = f\left(-\frac{x}{a} - x\right) = f\left(-\frac{1+a}{a}x\right) = \frac{1+a}{a^2}x$$

kaikilla x. Tästä seuraa, että a:n on toteutettava yhtälö $a^3 - 2a - 1 = 0$. Mutta $a^3 - 2a - 1 = (a+1)(a^2 - a - 1)$, joten (ii) määrää, että $a = -1$ tai a on jompikumpi niistä arvoista, jotka määräytyvät ehdosta (i). Kaikkiaan siis tehtävässä kysytyt luvut a ovat $\dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

4. *Kuningas Yrjö on päättänyt yhdistää valtakuntansa* 1680 *saarta silloilla toisiinsa. Pahaksi onneksi kapinalliset aikovat tuhota kaksi siltaa, sitten kun kaikki sillat ovat valmistuneet. Tuhottavat sillat lähtevät eri saarilta. Mikä on pienin määrä siltoja, joka kuninkaan on rakennutettava, jotta joka saarelle pääsisi siltaa pitkin vielä sitten, kun kapinalliset ovat tuhonneet silloista kaksi?*

Ratkaisu. Mihinkään saareen ei voi viedä vain yksi silta, koska kapinalliset voisivat tuhota sen ja eristää saaren muista saarista. Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa on kaksi toisiinsa liittyvää saarta S_1 js S_2, joista kummastakin lähtee vain kaksi siltaa. Ei voi olla niin, että molemmat sillat yhdistäisivät S_1:n S_2:een – tällöinhän S_1 ja S_2 olisivat muista saarista eristettyjä. Ei voi olla myöskään niin, että S_1 on yhdisetty saareen S_3 ja S_2 saareen $S_4 \neq S_3$. Siltojen $(S_1,\, S_3)$ ja $(S_2,\, S_4)$ tuhoaminen eristäisi S_1:n ja S_2:n muista saarista.

Tarkastellaan nyt saari- ja siltaverkkoa, joka on rakennettu kestämään terroristien kahden sillan tuhoamisen. Olkoon siinä B kappaletta siltoja. Jos verkossa on sellainen toisiinsa liitetty saaripari, että kummastakin parin saaresta lähtee vain kaksi siltaa, poistetaan tämä pari ja siihen liittyvät kolme siltaa. Jäljelle jää edelleen yhtenäinen saari- ja siltaverkko. Jos siinä on edellä kuvatunlainen pari, poistetaan se. Jatketaan tätä, niin kauan kuin mahdollista. Koska poistettavia saaria on parillinen määrä, jäljelle jää n saarta, missä n on parillinen, ja B' siltaa. Olkoon näiden joukossa x sellaista, joista lähtee vain kaksi siltaa. Tehdyn konstruktion perusteella mitkään kaksi näistä saarista eivät ole yhdistettyjä toisiinsa. Se merkitsee, että $B' \geq 2x$. Nyt $(n-x)$:stä saaresta lähtee ainakin 3 siltaa. Nyt $2B' \geq 2x + 3(n-x) = 3n - x$ ("saarista lähtevien siltojen" määrä on kaksi kertaa siltojen määrä). Kaikkiaan siis $2B' \geq \max\{4x,\, 3n-x\}$. Suorat $y = 4x$ ja $y = 3n - x$ leikkaavat pisteessä $x_0 = \dfrac{3n}{5}$, joten $2B' \geq \dfrac{12n}{5}$ ja $B' \geq \dfrac{6n}{5}$. Mutta nyt

$$B = B' + \frac{3}{2}(1680 - n) \geq \frac{6n}{5} + \frac{6 \cdot 1680}{4} - \frac{6n}{4} \geq \left(\frac{6}{4} - \frac{6}{20}\right) \cdot 1680 = 2016.$$

Osoitetaan sitten, että on mahdollista yhdistää saaret tasan 2016:lla sillalla niin, että tehtävän ehto täyttyy. Valitaan ensin 672 saarta, ja numeroidaan ne $0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, 671$. Rakennetaan saaresta numero i silta saariin numero $i-1$, $i+1$ ja $i + 336 \bmod 672$. Siltoja syntyy $\dfrac{3}{2} \cdot 672 = 1008$ kappaletta. Sillat kytkevät saaret numerojärjestyksessä renkaaksi $0 - 1 - 2 - 3 - \cdots - 671 - 0$. Jos näistä silloista katkaistaan yksi, jäljelle jää yhtenäinen verkko. Jos silloista katkaistaan kaksi, rengas katkeaa kahdeksi osaksi. Jos i on lyhemmässä osassa (tai jos osat ovat yhtä pitkät, kummassa tahansa), niin $i + 336 \bmod 672$ on toisessa osassa, ja verkko on yhä yhtenäinen. Jos yksi tai kaksi tuhottavaa siltaa on renkaan ulkopuolella, yhtenäisyys säilyy myös. Muutetaan nyt konstruktiota niin, että jokainen silta korvataan kahdella sillalla, jotka yhdistyvät yhteen sellaiseen saareen, joka ei ollut alkuperäisessä konstruktiossa. Silloilla yhdistettyjä saaria on nyt $672 + 1008 = 1680$ ja siltoja $2 \cdot 1008 = 2016$. Koska kapinalliset eivät katkaise kahta samalta saarelta lähtevää siltaa, sama päättely kuin edellä osoittaa, että rakennelman yhtenäisyys säilyy kahden sillan poistamisen jälkeen.