28. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

Ratkaisuja

1. *Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (missä $\mathbb{N}$ on luonnollisten lukujen joukko, johon kuuluu 0), joille pätee*

$$f(x^2) - f(y^2) = f(x+y)f(x-y)$$

kaikilla x, $y \in \mathbb{N}$, joilla $x \geq y$.

Ratkaisu. Havaitaan heti, että ainakin funktiot $f(x) = x$ ja $f(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$ ovat tehtävän ratkaisuja. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Kun tehtävän yhtälöön sijoitetaan $x = y = 0$, saadaan $0 = f(0)^2$. Siis välttämättä $f(0) = 0$. Kun sijoitetaan vain $y = 0$, saadaan $f(x^2) = (f(x))^2$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$. Erityisesti $f(1) = f(1)^2$, joten on oltava $f(1) = 0$ tai $f(1) = 1$.

Oletetaan, että $f(1) = 0$. Silloin

$$(f(x+1))^2 - (f(x))^2 = f\left((x+1)^2\right) - f\left(x^2\right) = f(2x+1)f(1) = 0$$

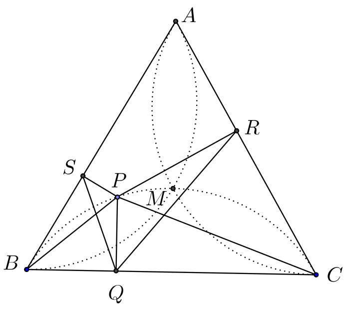
kaikilla $x \in \mathbb{N}$. Koska $f(0) = 0$, niin $f(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$.

Oletetaan, että $f(1) = 1$. Olkoon $f(2) = a$. Silloin $a^2 - 1 = f(2)^2 - f(1)^2 = f\left(2^2\right) - f\left(1^2\right) = f(3)f(1) = f(3)$. Koska $f(4) = f\left(2^2\right) = (f(2))^2 = a^2$, niin $(a^2-1)^2 - 1 = f\left(3^2\right) - f\left(1^2\right) = f(4)f(2) = a^2 \cdot a$ eli $a^4 - 2a^2 = a^3$. Joko $a = 0$ tai $a^2 - 2 = a$. Koska $a \geq 0$, jälkimmäisen yhtälön toteuttaa vain $a = 2$. Jos olisi $a = 0$, olisi $f(3) = -1$. Koska tämä ei ole sallittua, on oltava $f(2) = 2$ ja $f(3) = 2^2 - 1 = 3$. Nyt voidaan osoittaa induktiolla, että $f(n) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos nimittäin $f(n) = n$ kaikilla $k \leq n$, ja $k \geq 2$, niin $k^2 - 1 = f(k)^2 - f(1)^2 = f(k^2) - f(1^2) = f(k+1)f(k-1) = f(k+1)(k-1)$, josta seuraa $f(k+1) = k+1$.

2. *Määritä tasasivuisen kolmion kaikki sellaiset sisäpisteet, joiden etäisyys yhdestä kolmion sivusta on niiden kolmion kahdesta muusta sivusta mitattujen etäisyyksien geometrinen keskiarvo. [Lukujen x ja y geometrinen keskiarvo on $\sqrt{xy}$.]*

Ratkaisu. Olkoon ABC tasasivuinen kolmio, P sen sisäpiste ja Q, R, S P:n kohtisuorat projektiot sivuilla BC, CA, AB. Silloin $ASPR$, $BQPS$ ja $CRPQ$ ovat jännenelikulmioita, ja koska kolmion kulmat ovat 60°, niin $\angle RPS = \angle SPQ = \angle QPR = 120°$. Oletetaan, että PQ on PS:n ja PR:n geometrinen keskiarvo. Silloin

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{PQ}{PR}.$$



Mutta tästä seuraa, että kolmiot PSQ ja PQR ovat yhdenmuotoisia (sks). Siis $\angle PSQ = \angle PQR$ ja $\angle PQS = \angle PRQ$. Jännenelikulmioista $BQPS$ ja $CRPQ$ nähdään, että $\angle PBQ = \angle PSQ$ ja $\angle PCQ = \angle PRQ$. Mutta koska $\angle SPQ = 120°$, niin $\angle PBQ + \angle PCQ = \angle PSQ + \angle PQS = 180° - \angle SPQ = 60°$. Siis myös

$\angle BPC = 120°$. P sijaitsee sillä ympyrän kaarella, jolta BC näkyy 120°:een kulmassa. Tämä kaari sisältää kolmion ABC keskipisteen M. Päättely on helposti käännettävissä: jos P on tämän ympyrän kaaren piste, niin kolmiot PSQ ja PQR ovat yhdenmuotoiset (kk), ja

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{PQ}{PR}.$$

Jos PS on PQ:n ja PR:n geometrinen keskiarvo, P on pisteiden A, B, M määräämällä kaarella ja jos PR on PS:n ja PQ:n geometrinen keskiarvo, P on pisteiden A, C, M määräämällä kaarella. Näillä kaarilla olevilla pisteillä on toisaalta tehtävän mukainen keskiarvo-ominaisuus.

3. *Määritä kaikki ei-negatiiviset kokonaisluvut a, b, c, joille*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{2014}.$$

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että jos kahden ei-negatiivisen kokonaisluvun x ja y neliöjuurien summa on rationaaliluku, niin molemmat kokonaisluvut ovat neliölukuja. Olkoon siis $\sqrt{x} + \sqrt{y} = q \in \mathbb{Q}$. Jos $q = 0$, $x = y = 0$. Jos $q > 0$, niin $x + y + 2\sqrt{xy} = q^2$ Siis $\sqrt{xy}$ on rationaaliluku. Se on mahdollista vain, jos xy on neliöluku, $xy = z^2$. Silloin $x = \dfrac{z^2}{y}$ ja $q = \dfrac{z}{\sqrt{y}} + \sqrt{y}$. Mutta silloin $\sqrt{y} = \dfrac{z + y}{q} \in \mathbb{Q}$. Mutta tämä on mahdollista vain, jos y on neliöluku. Silloin myös x on neliöluku.
Tehtävän yhtälöstä seuraa $a + b + 2\sqrt{ab} = 2014 + c - 2\sqrt{2014c}$. Siis $\sqrt{ab} + \sqrt{2014c} \in \mathbb{Q}$. Edellä todisteun mukaan tämä on mahdollista vain, jos ab ja $2014c$ ovat neliölukuja. Koska $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, on oltava $c = 2014m^2$ jollain kokonaisluvulla m. Samalla päättelyllä saadaan $a = 2014k^2$ ja $b = 2014l^2$. Mutta nyt $k + m + l = 1$, joten luvuista k, m, l tasan yksi on $= 1$ ja kaksi muuta ovat $= 0$. Kolmikko (a, b, c) on siis joko $(2014, 0, 0)$, $(0, 2014, 0)$ tai $(0, 0, 2014)$.

4. *Pelilautana on $n \times n$ -šakkilauta. Pelin alussa joka ruudulla on 99 kiveä. Pelaajat A ja B valitsevat vuorotellen jonkin laudan vaaka- tai pystyrivin ja poistavat jokaisesta valitun rivin ruudusta yhden kiven. Pelaaja saa valita sellaisen rivin, jonka jokaisessa ruudussa on ainakin yksi kivi. Se pelaaja, joka ei voi valita tällaista riviä, häviää pelin. Pelaaja A aloittaa. Määritä kaikki ne luvut n, joilla hänellä on voittostrategia.*

Ratkaisu. Osoitetaan, että A:lla on voittostrategia, jos ja vain jos n on pariton. Osoitetaan ensin, että riippumatta siitä, miten A ja B pelaavat, lauta on tyhjä, silloin kun peli päättyy. Olkoon (i, j) ruutu, joka on i:nessä vaaka- ja j:nnessä pystyrivissä. Tehdään vastaoletus: laudalla on jokin ei-tyhjä ruutu (a, b) tilanteessa, jossa peli päättyy. Silloin a:nnessa vaakarivissä on jokin tyhjä ruutu (a, c) ja b:nnessä pystyrivissä on jokin tyhjä ruutu (d, b). Oletetaan, että i:s vaakarivi on valitu r_i kertaa ja j:s pystyrivi s_j kertaa silloin, kun peli päättyy. Nyt $r_a + s_b < 99$, $r_a + s_c = 99$ ja $r_d + s_b = 99$. Siis $r_d + s_c > 99$. Tämä on mahdotonta, koska ruudusta (d, c) on ollut alussa 99 kiveä, joten siitä on voitu ottaa kivi vain 99 kertaa.

Peli päättyy siis $\dfrac{99 \cdot n^2}{99} = n^2$ pelivuoron jälkeen, koska joka vuorolla poistuu 99 kiveä. Jos n on pariton, A voittaa riippumatta siitä, miten hän pelaa, koska A:n noston jälkeen on nostoja on tehty pariton määrä ja B:n noston jälkeen parillinen määrä. Jos n on parillinen, niin B voittaa aina.