27. Pohjoismainen matematiikkakilpailu – tehtävien ratkaisuja

1. *Olkoon* $(a_n)_{n\geq 1}$ *lukujono, jonka määrittelevät ehdot* $a_1 = 1$ *ja*

$$a_{n+1} = \left\lfloor a_n + \sqrt{a_n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

kaikilla $n \geq 1$; $\lfloor x \rfloor$ *tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin* x. *Määritä kaikki* $n \leq 2013$, *joille* a_n *on neliöluku.*

Ratkaisu. Jonon alkupään termit on helppo laskea: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_6 = 10$, $a_7 = 13$, $a_8 = 17$, $a_9 = 21$, $\ldots$. Näyttäisi siis siltä, että $a_{2n} = n^2 + 1$ ja $a_{2n+1} = n^2 + n + 1$. Osoitetaan induktiolla, että näin todella on. Näin on, kuten edellä todettiin, pienillä n:n arvoilla, joten induktio pääsee alkuun. Oletetaan, että jollain k on $a_{2k} = k^2 + 1$. Koska

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 = k^2 + k + \frac{1}{4} > k^2 + 1$$

, on $k < \sqrt{k^2 + 1} < k + \dfrac{1}{2}$ ja

$$a_{2k+1} = \left\lfloor k^2 + 1 + \sqrt{k^2 + 1} + \frac{1}{2} \right\rfloor = k^2 + k + 1.$$

Oletetaan, että jollain k on $a_{2k+1} = k^2 + k + 1$. Koska

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 = k^2 + k + \frac{1}{4} < k^2 + k + 1,$$

on $\sqrt{k^2 + k + 1} > k + \dfrac{1}{2}$. Siis

$$a_{2k+2} = k^2 + k + 1 + k + 1 = (k + 1)^2 + 1.$$

Induktio on valmis. Mutta tästä seuraa, että a_{2n} on aina yhtä suurempi kuin jokin neliöluku ja a_{2n+1} on peräkkäisten neliölukujen n^2 ja $(n + 1)^2$ välissä. a_n on neliöluku vain, kun $n = 1$.

2. *Jalkapalloturnaukseen osallistuu* n *joukkuetta,* $n \geq 4$, *ja jokainen joukkue pelaa tasan kerran jokaista muuta vastaan. Oletetaan, että turnauksen päätyttyä joukkueiden pisteet muodostavat aritmeettisen jonon, jossa jokainen joukkue on saanut yhden pisteen enemmän kuin järjestyksessä seuraava. Määritä pienimmän pistemäärän saaneen joukkueen suurin mahdollinen pistemäärä, kun pisteet jaetaan jalkapallossa tavallisella tavalla (ottelun voittaja saa kolme pistettä ja häviäjä nolla, ja tasapelissä molemmat joukkueet saavat yhden pisteen).*

Ratkaisu. Kun joukkueita on n, pelejä on $\binom{n}{2}$. Jos peleistä v päättyy voittoon ja $t = \binom{n}{2} - v$ tasapeliin, pisteitä jaetaan $3v + 2t = v + 2\binom{n}{2}$. kappaletta. Jos viimeiseksi jäänyt joukkue saa k pistettä, niin sarjan päättyessä tehtävässä esitetyllä tavalla pisteitä on jaettu $nk+1+2+\cdots+(n-1) = nk + \frac{(n-1)n}{2} = nk + \binom{n}{2}$ kappaletta. On siis oltava $nk = v + \binom{n}{2}$. Koska $v \le \binom{n}{2}$, $nk \le 2\binom{n}{2} = (n-1)n$ ja $k \le n-1$. Jos olisi $k = n-1$ olisi $v = \binom{n}{2}$. Tällöin kaikki ottelut päättyisivät voittoon ja kaikkien joukkueiden pistemäärät olisivat jaollisia kolmella. Siis $k \le n-2$. Osoitetaan, että kaikilla n on mahdollista, että $k = n-2$. Osoitetaan ensin, että näin voi olla, kun $n = 4$. Olkoot joukkueet A, B, C ja D. Jos ottelut päättyvät seuraavasti (pystysarakkeessa kunkin joukkueen vaakarivillä olevaa joukkuetta vastaan saadusta ottelusta saama pistemäärä):

$$\begin{array}{ccccc} & A & B & C & D \\ A & - & 0 & 1 & 1 \\ B & 3 & - & 1 & 0 \\ C & 1 & 1 & - & 1 \\ D & 1 & 3 & 1 & - \end{array},$$

niin A saa 5, B 4, C 3 ja D 2 pistettä. Oletetaan sitten, että jokin n:n joukkueen sarja on päättynyt niin, että joukkueiden pistemäärät ovat $n-2$, $n-1$, $\ldots$, $2n-3$. Silloin otteluista on voittoon päättynyt

$$n(n-2) - \binom{n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

kappaletta. Liitetään sarjaan uusi joukkue X ja osoitetaan, että sen ottelut muiden n:n joukkueen kanssa voivat päättyä niin, että kaikkien joukkueiden pistemäärät muodostavat jonon $n-1$, n, $\ldots$, $2n-1$. Koska voittoon on nyt päättynyt

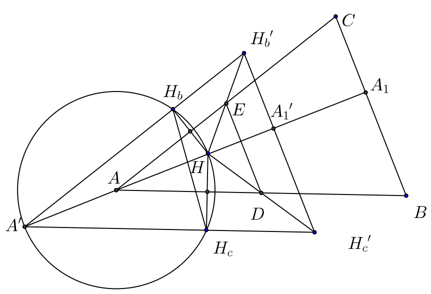
$$\frac{(n+1)(n-2)}{2} = \frac{n^2-n-2}{2}$$

ottelua, eli $n-1$ enemmän kuin n:n joukkueen tapauksessa, X:n otteluista tasan yksi saa päättyä tasapeliin. X:n pistemäärän on oltava $3p+1$ jollain p. Jos joukkueilla A, B ja C on alkuaan y, $y+1$ ja $y+2$ pistettä, niin sen jälkeen kun X on hävinnyt A:lle ja B:lle ja voittanut C:n, joukkueilla on $y+4$, $y+3$ ja $y+2$ pistettä. Jos nyt n on kolmella jaollinen, X voi pelata alkuperäisen sarjataulukon $n-3$:a joukkuetta vastaan edellä kuvatulla tavalla ja saada näiltä aina kolmea joukketta kohden kolme pistettä eli yhteensä $n-3$ pistettä ja näiden joukkueiden pisteet muodostavat aritmeettisen jonon $n+3$:sta $2n-1$:een. Olkoot sitten A, B ja C taulukon kolme viimeista joukkuetta. Niillä on siis pisteet $n-2$, $n-1$ ja n. Jos X pelaa tasan A:n kanssa, voittaa C:n ja häviää B:lle, niin A:n, B:n ja C:n pisteet tulevat olemaan $n-1$, $n+2$ ja n. X:n pistemääräksi tulee $(n-3)+3+1=n+1$. Jos $n \equiv 1 \bmod 3$, $n = 3p+1$, niin X voi pelata taulukon $3p$:tä ensimmäistä joukkuetta vastaan kuvatulla tavalla ja saada näiltä $3p$ pistettä; näiden joukkueiden pisteet muodostavat pelien jälkeen aritmeettisen jonon $n+1$:stä $2n-1$:een. Jos X pelaa tasan taulukon viimeisen joukkueen kanssa, X:n pistemääräksi tulee $3p+1=n$ ja viimeisen joukkueen pistemääräksi $n-1$. Jos viimein $n \equiv 2 \bmod 3$, $n = 3p+2$, X voi saada taulukon $3p$:ltä ensimmäiseltä joukkueelta $3p$ pistettä. Jos X häviää taulukon viimeiselle ja pelaa tasan viimeistä edellisen joukkueen kanssa, näiden joukkueiden pisteiksi tulevat $n+1$ ja n, ja X:n pisteiksi $3p+1=n-1$. Aritmeettinen jono syntyy taas. Induktioaskel on otettu ja väite todistettu.

3. *Määritellään jono $(n_k)_{k\ge 0}$ asettamalla $n_0 = n_1 = 1$, $n_{2k} = n_k + n_{k-1}$ ja $n_{2k+1} = n_k$, kun $k \ge 1$. Olkoon vielä $q_k = n_k/n_{k-1}$ kaikilla $k \ge 1$. Osoita, että jokainen positiivinen rationaaliluku esiintyy tasan kerran jonossa $(q_k)_{k\ge 1}$.*

Ratkaisu. Jonon määritelmän mukaan $n_{2k} = n_k + n_{k-1} = n_{2k+1} + n_{2(k-1)+1} = n_{2k-1} + n_{2k+1}$. Jokainen parillisindeksinen termi on siis suurempi kuin jonossa seuraava termi. Oletetaan, että jonossa (q_n) ei ole kaikkia positiivisia rationaalilukuja. Silloin kaikki positiivisten kokonaislukujen parit $(p,\ q)$ eivät esiinny jonossa (n_k) peräkkäisinä jäseninä. Olkoon t pienin kokonaisluku, jolle on olemassa jokin pari $(p,\ q)$, missä $p+q=t$ ja p ja q eivät ole jonon peräkkäisiä jäseniä. Oletetaan, että $p > q$. Silloin p:n olisi tullut olla parillisindeksinen termi, joten jonossa ei ole peräkkäisiä termejä $p-q$, p, q mutta ei myöskään peräkkäisiä termejä $p-q$, q. Mutta koska $p-q+q=p<t$, saatiin ristiriita. Jos $q > p$, saadaan samanlainen ristiriita. Kaikki positiiviset rationaaliluvut ovat jonossa (q_n). On vielä osoitettava, että kukin luku on jonossa vain kerran. Osoitetaan ensin, että jonossa (n_k) kahden peräkkäisen luvun suurin yhteinen tekijä on 1; ts. jonon peräkkäiset luvut eivät voi muodostaa murtolukua, jonka voisi supistaa. Jos $(p,\ q)$ olisi jonossa ensimmäinen tällainen pari, niin ja p olisi luvuista suurempi, sillä olisi parillinen indeksi, ja jonossa vierekkäiset paritonindeksiset luvut olisivat $p-q$ ja q. Mutta silloin jo $(p-q,\ q)$ olisi pari, jota voitaisiin supistaa, ja se esiintyisi jonossa aikaisemmin. Jos jonossa (n_k) esiintyisi jokin kahden peräkkäisen luvun pari kahdesti, jokin pari $(p,\ q)$ olisi ensimmäinen toistuva, Jos olisi $p>q$, niin pari $(p-q,\ q)$ toistuisi myös ja esiintyisi jonossa aikaisemmin. Vastaava päättely toimii myös, jos $p<q$.

4. *Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio ja H sen sisäpiste. Olkoot H_c ja H_b pisteen H kuvat peilauksissa yli suorien AB ja AC, tässä järjestyksessä, ja olkoot H'_c ja H'_b H:n kuvat peilauksissa yli AB:n ja AC:n keskipisteiden. Osoita, että pisteet H_b, H'_b, H_c ja H'_c ovat samalla ympyrällä jos ja vain jos ainakin kaksi niistä yhtyy tai jos H on kolmion ABC kärjestä A piirretyllä korkeusjanalla.*



Ratkaisu. Olkoot D ja E AB:n ja AC:n keskipisteet. Kolmio ADE on kolmion ABC kanssa yhdenmuotoinen suhteessa $1:2$. Homotetia, jonka keskus on H kerroin 2 vie janan

DE janaksi $H'_cH'_b$ ja AD:n ja AE:n AB:n ja AC:n suuntaisille suorille, jotka kulkevat H_c:n ja H_b:n kautta. Jos suorien leikkauspiste on A', niin syntynyt kolmio $A'H'_cH'_b$ on kolmion ABC kanssa yhtenevä ja sivuiltaan yhdensuuntainen. Jos H on kolmion ADE korkeusjanalla, H on myös $A'H'_cH'_b$ korkeusjanalla. Koska $HH_c \perp H_cH'_c$ ja $HA'_1 \perp H'_cH'_b$, $HH_cH'_cA'_1$ on jännenelikulmio. Silloin $\angle H_cHA = \angle H_cH'_cA'_1$. Mutta myös $A'H_cHH_b$ on jännenelikulmio ja $A'H$ on tämän nelikulmion ympärysympyrän halkaisja. Siis $\angle A'H_bH_c = \angle A'HH_c$. Mutta nyt on nähty, että nelikulmiossa $H_cH'_cH'_bH_b$ vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia, joten nelikulmio on jännenelikulmio.

Oletetaan sitten, että $H_cH'_cH'_bH_b$ on jännenelikulmio. Jos A'_1 on sellainen $H'_cH'_b$:n piste, että $HA_1 \perp H'_cH'_b$ niin kulman $H_cHA'_1$ vieruskulma on yhtä suuri kuin $\angle H_cH'_cA'_1$ ja siis yhtä suuri kuin $\angle A'H_bH_c$. Mutta tämä merkitsee sitä, että suora A'_1H kulkee pisteen A' kautta, mistä seuraa, että H on kolmion ADE ja siten myös kolmion ABC korkeusjanalla.