26. Pohjoismainen matematiikkakilpailu
Tiistai, 27. maaliskuuta 2012
Ratkaisuja

1. tehtävä. *Reaaliluvuille a, b, c pätee $a^2 + b^2 = 2c^2$ ja $a \neq b$, $c \neq -a$, $c \neq -b$. Osoita, että*

$$\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)}$$

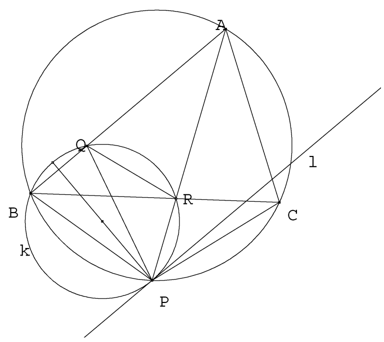
on kokonaisluku.

Ratkaisu. Tehtävässä annetusta ehdosta seuraa $-b^2 = a^2 - 2c^2$ ja $2a^2 - b^2 - c^2 = 3(a^2 - c^2) = 3(a+c)(a-c)$. Näin ollen tutkittava lauseke supistuu muotoon

$$\frac{3(a-c)(2a+b+c)}{(a-b)(b+c)}.$$

Lasketaan osoittaja: $3(a-c)(2a+b+c) = 3(a^2+ab+2ac-ac-bc-2c^2) = 3(ab+ac-bc-b^2)$; jälkimmäisen yhtäsuuruuden kohdalla on jälleen käytetty hyväksi tietoa $a^2 - 2c^2 = b^2$. Mutta $ab + ac - bc - b^2 = (a-b)(b+c)$. Tehtävän lausekkeen arvo on siis aina 3.

2. tehtävä. *Piste P on se kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän piste, joka puolittaa kaarista BC sen, jolla piste A ei ole. Piirretään P:n kautta AB:n suuntainen suora ℓ. Olkoon k pisteen B kautta kulkeva ympyrä, joka sivuaa suoraa ℓ pisteessä P. Olkoon Q ympyrän k ja suoran AB toinen leikkauspiste. (Ellei toista leikkauspistettä ole, niin $Q = B$.) Todista, että $AQ = AC$.*



1. ratkaisu. Olkoon kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä Γ ja kolmion ABC kulmat α, β ja γ. Olkoon R BC:n ja AP:n leikkauspiste. Koska P on kaaren BC keskipiste, $\angle QAR = \angle QAP = \angle CAP = \angle CAR = \dfrac{\alpha}{2}$. Ympyrän k pisteeseen P piirretty halkaisija on kohtisuorassa ℓ:ää ja siis AQ:ta vastaan, joten $PB = PQ$ ja siis $\angle BQP = \angle QBP$. Mutta ympyrän Γ kehäkulmina $\angle PCB = \angle PAC$. Siis $\angle BQB = \angle QBP = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$. Kolmion ABR kulman vieruskulmana myös $\angle ARC = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$. Ristikulmien yhtasuuruuteen yhdistettynä saadaan $\angle PRB = \angle PQB$. Piste R on siis ympyrällä k. Koska siis $BPRQ$ on jännenelikulmio, on $\angle ARQ = \angle QBP = \angle ARC$. Mutta tästä seuraa, että kolmiot AQR ja ACR ovat yhteneviä (ksk), joten $AQ = AC$.

2. ratkaisu. Osoitetaan niin kuin edellä, että $PQ = PB = PC$. Koska $\angle QAP = \angle CAP$, kolmioissa APQ ja APC on kaksi yhtä pitkää sivua ja kaksi yhtä suurta kulmaa. Koska $ABPC$ on jännenelikulmio, kulman PBQ vieruskulma, joka on yhtä suuri kuin kulman PQB vieruskulma, on kulman ACP suuruinen. Kolmiot APQ ja APC ovat siis yhteneviä (ssk), ja $AQ = AC$.

3. tehtävä. *Määritä pienin positiivinen kokonaisluku n, jolle on olemassa n (ei välttämättä eri suurta) kokonaislukua $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $1 \le x_k \le n$, joille pätee*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ja} \quad x_1 x_2 \cdots x_n = n!,$$

mutta $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \ne \{1, 2, \ldots, n\}$.

Jos n on alkuluku, jonkun luvuista x_k on oltava n. Jos n toteuttaa tehtävän ehdon, niin silloin myös $n-1$ toteuttaa tehtävän ehdon. Pienin n ei siis ole alkuluku. Huomataan, että $4+4+9 = 17 = 3+6+8$ ja $4 \cdot 4 \cdot 9 = 2^4 \cdot 3^2 = 3 \cdot 6 \cdot 8$ Joukko $\{1, 2, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9\}$ toteuttaa tehtävän ehdon. Osoitetaan, että kun $n = 8$, haluttua joukkoa ei löydy. Jos tällainen joukko olisi olemassa, jokin sen luvuista olisi 5 ja jokin 7. Olisi siis 6 lukua x_k, $1 \le x_k \le 8$, joiden tulo on $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 2^7 \cdot 3^2$ ja summa $36 - 12 = 24$. Luvuissa on parillinen määrä parittomia ja parillinen määrä parillisia lukuja. Jos parillisia lukuja olisi vain kaksi, niistä suurempi olisi $\ge 2^4$. Parillisia lukuja on siis ainakin neljä ja parittomia enintään kaksi. Jos kaikki kuusi lukua ovat parillisia, yhden on oltava 4, kahden 6 ja kolmen 2, joilloin lukujen smma on 22. Jos luvuista kaksi on parittomia, ne ovat 1 ja 1 tai 1 ja 3 tai 3 ja 3. Ensimmäisessä tapauksessa parilliset luvut voivat olla vain 4, 6, 6, 8, ja lukujen summa on 26. viimeisessä tapauksessa parilliset luvut ovat ovat joko 2, 4, 4, 4 tai 2, 2, 4, 8. Ensimmäisessä tapauksessa lukujen summa on 20, jälkimmäisessä 22. Jos viimein parittomat luvut ovat 1 ja 3, niin parilliset ovat joko 6, 4, 4, 4; summa 22, tai 2, 6, 4, 8, summa 24, mutta $\{x_1, \ldots, x_8\} = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Todetaan vielä, että jos tehtävän minaisuus on jollain luvulla n, se on kaikilla n:ää suuremmilla luvuilla. Siis ominaisuutta ei ole luvuilla $n \le 8$, ja tehtävässä kysytty pienin luku on 9.

4. tehtävä. *Taululle on kirjoitettu luku* 1*. Sen jälkeen taululle kirjoitetaan vaiheittain lisää lukuja seuraavasti: kussakin vaiheessa taululla oleva luku a korvataan luvuilla $a-1$ ja $a+1$; jos taululle ilmestyy luku* 0*, se pyyhitään pois. Jos jokin luku ilmestyy taululle useammin kuin kerran, kaikki esiintymät jätetään taululle.Siten vaiheessa* 0 *taululla on luku* 1*, vaiheessa* 1 *luku* 2*, vaiheessa* 2 *luvut* 1 *ja* 3*, vaiheessa* 3 *luvut* 2*,* 2 *ja* 4 *jne. Montako lukua taululla on vaiheessa n?*

1. ratkaisu. Olkoon $f(k)$ taululla olevien lukujen määrä k:n vaiheen jälkeen. Siis $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 6$ jne. Kaikki syntyvät luvut ovat muotoa $1 \pm 1 \pm 1 \ldots \pm 1$, missä n:nnen vaiheen jälkeen $\pm$-merkkejä on n kappaletta. Operaatio ± 1 muuttaa luvun parillisuuden. Tästä seuraa, että parittoman vaihemäärän jälkeen taululla on vain parillisia lukuja ja seuraavassa vaiheessa lukujen määrä kaksinkertaistuu: $f(2n) = 2f(2n-1)$. Määritetään $f(2n)$. Vaiheessa $2n$ taululla ovat kaikki ne luvut, joiden lausekkeessa $1 \pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1$ vasemmalta laskien $+$-merkkien määrä on aina suurempi tai yhtä suuri kuin $-$-merkkien. Sanomme, että tällaisessa jonossa plussat ovat voitolla. Osoitetaan, että tällaisten jonojen lukumäärä on sama kuin sellaisten jonojen, joissa on yhtä monta $+$- ja $-$-merkkiä. Lasketaan, kuinka monta ykköstä taululla on vaiheen $2n$ jälkeen. Ykköset ovat syntyneet $\pm$-jonoista, joissa on yhtä monta $+$:aa ja $-$:ta ja $+$:t ovat voitolla. Jos merkkien järjestystä ei otettaisi huomioon, jonoja olisi $\binom{2n}{n}$. Sellainen jono, jossa $+$:t eivät ole voitolla, voidaan muuttaa jonoksi, jossa on $n+1$ $+$:aa, kun lasketaan alusta ensimmäinen sellainen osajono, jossa miinuksia on enemmän, ja vaihdetaan sinä kaikki merkit. Kääntäen jokaisesta jonosta, jossa on $n+1$ $+$:aa ja $n-1$ $-$:ta, saadaan sellainen jono, jossa kumpaakin merkkiä on yhtä paljon, mutta $+$:t eivät ole voitolla, kun alusta lasketaan ensimmäinen osajono, jossa $+$:ia on enemmän, ja käännetään merkit. Koska jonoja, joissa on $n+1$ $+$:aa on $\binom{2n}{n+1}$ kappaletta, vaiheen $2n$ jälkeen taululla on

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

ykköstä. Mutta tämä merkitsee, että

$$f(2n+1) = 2f(2n) - \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1}.$$

Osoitetaan vielä induktiolla, että

$$f(2n) = \binom{2n}{n}, \quad f(2n+1) = \binom{2n+1}{n}. \tag{1}$$

Tämä on totta esimerkiksi, kun $n = 1$. Jos (1) pätee, niin

$$f(2n+2) = 2f(2n+1) = \frac{2(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)n!(n+1)!} = \binom{2n+2}{n+1}$$

ja

$$f(2(n+1)+1) = 2f(2(n+1)) - \binom{2(n+1)}{n+1} + \binom{2(n+1)}{n+2} = \binom{2n+3}{n+2}$$

Pascalin kolmion perusominaisuuden nojalla.

2. ratkaisu. (Janne Hannikaisen kilpailuratkaisusta mukailtu.) Koska tehtävässä kuvatussa prosessissa parillisissa vaiheissa taululla on vain parittomia ja parittomissa vaiheissa parillisia lukuja ja vaiheessa n taulun suurin luku on $n+1$, niin vaiheessa n taululla on lukuja $n+1-2j$, $k = 0, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Olkoon $f(n, j)$ luvun $n+1-2j$ lukumäärä taululla vaiheessa n ja $F(n, k) = f(n, 0) + f(n, 1) + \ldots + f(n, k-1)$ eli taululla olevia k:ta suurinta lukuarvoa edustavien lukujen määrä. Silloin $F(n, 1) = f(n, 0) = 1$ kaikilla n ja tehtävässä kysytty luku on $F\left(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$. Osoitetaan, että

$$F(n, k) = \binom{n}{k-1} \tag{1}$$

kaikilla n ja k, $1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Tämä on selvästi totta, kun $n = 0, 1, 2, 3$. Oletetaan, että (1) on totta jollain n. Jos n on parillinen, $n = 2m$, taululla on vain parittomia lukuja ja vaiheessa $n+1 = 2m+1$ taululla on yhtä monta eri lukuarvoa kuin edellisessä vaiheessa. Vaiheen $2m+1$ k suurinta lukua syntyvät vaiheen $2m$ k:sta suurimmasta luvusta, joihin kuhunkin on lisätty 1 ja vaiheen $2m$ $k-1$:stä suurimmasta luvusta, joista jokaisesta on vähennetty 1. Siis

$$F(n+1,\, k) = F(n,\, k) + F(n,\, k-1) = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} = \binom{n+1}{k-1}. \tag{2}$$

Jos n on pariton, $n = 2m+1$, taululla on vain parillisia lukuja, $m+1$:tä eri lukuarvoa. Kun $k \le m+1$, vaiheen $2m+2$ k suurinta lukua syntyvät samoin kuin siirryttäessä vaiheesta $2m$ vaiheeseen $2m+1$, joten (1) pätee. Lisäksi vaiheen $2m+2$ $m+2$:n suurimman lukuarvon lukujen määrä (eli kaikkien lukujen) saadaan kertomalla vaiheen $2m+1$ lukujen määrä $F(2m+1,\, m+1)$ kahdella. Siis

$$F(2m+2,\, m+2) = 2F(2m+1,\, m+1) = 2\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+2}{m+1},$$

eli (2) pätee nytkin. Todistus on valmis.