26. Pohjoismainen matematiikkakilpailu
Tiistai, 27. maaliskuuta 2012
Suomenkielinen versio – Finnish version

Työaikaa 4 tuntia. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 5. Vain kirjoitus- ja piirtämisvälineitä saa käyttää.

1. tehtävä. Reaaliluvuille a, b, c pätee $a^2 + b^2 = 2c^2$ ja $a \neq b$, $c \neq -a$, $c \neq -b$. Osoita, että

$$\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)}$$

on kokonaisluku.

2. tehtävä. Piste P on se kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän piste, joka puolittaa kaarista BC sen, jolla piste A ei ole. Piirretään P:n kautta AB:n suuntainen suora ℓ. Olkoon k pisteen B kautta kulkeva ympyrä, joka sivuaa suoraa ℓ pisteessä P. Olkoon Q ympyrän k ja suoran AB toinen leikkauspiste. (Ellei toista leikkauspistettä ole, niin $Q = B$.) Todista, että $AQ = AC$.

3. tehtävä. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku n, jolle on olemassa n (ei välttämättä eri suurta) kokonaislukua $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $1 \leq x_k \leq n$, kun $1 \leq k \leq n$, joille pätee

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ja} \quad x_1 x_2 \cdots x_n = n!,$$

mutta $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \{1, 2, \ldots, n\}$.

4. tehtävä. Taululle on kirjoitettu luku 1. Sen jälkeen taululle kirjoitetaan vaiheittain lisää lukuja seuraavasti: kussakin vaiheessa jokainen taululla oleva luku a korvataan luvuilla $a-1$ ja $a+1$; jos taululle ilmestyy luku 0, se pyyhitään pois. Jos jokin luku ilmestyy taululle useammin kuin kerran, kaikki esiintymät jätetään taululle. Siten vaiheessa 0 taululla on luku 1, vaiheessa 1 luku 2, vaiheessa 2 luvut 1 ja 3, vaiheessa 3 luvut 2, 2 ja 4 jne. Montako lukua taululla on vaiheessa n?