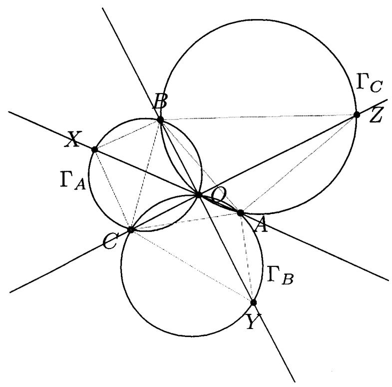
Pohjoismainen matematiikkakilpailu 2010

Tehtävien ratkaisuja

1. Koska f on kasvava, $f(7)f(13) = f(7 \cdot 13) = f(91) \geq f(90) = f(9 \cdot 10) = f(9)f(10)$. Samoin $f(8)f(9) = f(8 \cdot 9) = f(72) \geq f(70) = f(7 \cdot 10) = f(7)f(10)$. Koska f saa vain positiivisia arvoja, Siis $f(7)f(13)f(8)f(9) \geq f(9)f(10)f(7)f(10)$. Kun tämä epäyhtälö jaetaan puolittain luvulla $f(7)f(9)$, saadaan väite.

2. *1. ratkaisu.* Olkoon $\angle AOY = \alpha$, $\angle AOZ = \beta$ ja $\angle ZOB = \gamma$. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Lisäksi $\angle BOX = \alpha$ (ristikulmat) ja $\angle ACY = \alpha = \angle BCX$ (kehäkulmat); $\angle COX = \beta$ (ristikulmat), $\angle ABZ = \beta = \angle CBX$ (kehäkulmat); $\angle COY = \gamma$ (ristikulmat); $\angle BAZ = \gamma = \angle CAY$. Jokaisessa kolmioista CYA, CBX ja ZBA on nyt kaksi kulmaa joukosta $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Silloin kolmannenkin on oltava kyseisen joukon kolmas kulma. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisuudesta seuraa



$$\frac{AY}{CY} = \frac{AB}{BZ}, \quad \frac{CX}{BX} = \frac{AZ}{AB}.$$

Siis

$$\frac{AY}{AZ} \cdot \frac{BZ}{BX} \cdot \frac{CX}{CY} = \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{AZ}{AB} \cdot \frac{BZ}{AZ} = 1.$$

2. ratkaisu. Olkoot kulmat α, β ja γ niin kuin ensimmäisessä ratkaisussa ja olkoot ympyröiden Γ_A, Γ_B ja Γ_C säteet R_A, R_B ja R_C. Laajennetun sinilauseen perusteella $AY = 2R_B \sin \alpha$, $BZ = 2R_C \sin \gamma$, $CX = 2R_A \sin \beta$, $AZ = 2R_C \sin \beta$, $BX = 2R_A \sin \alpha$ ja $CY = 2R_B \sin \gamma$. Kun nämä sijoitetaan tehtävän lausekkeeseen, nähdään heti, että lausekkeen arvo on 1.

3. Jos Risto valitsee kaksi lamppua, jotka hän joka kerta sytyttää, hän voi käydä läpi kaikki muiden lamppujen kytkinten 2^{2008} asentoa ilman, että Laura saa tietää kahden lampun tilanteesta. Sen jälkeen hän voi jättää molemmat lamput sammuksiin ja taas käydä läpi muiden lamppujen 2^{2008} eri asentoa. Tämän jälkeen Riston on valittava jokin sellainen yhdistelmä, jossa vain toinen valituista lampuista palaa, ja nyt Laura saa tietää näiden lamppujen tilan. Mutta läpikäydyissä tapauksissa on esiintynyt jokaisen muun lampun kohdalla tilanne, jossa vain se on sytytettynä; näin Laura on saanut tietää kaikkien lamppujen ja kytkinten yhteyden kaikkiaan $2^{2009}+1$:n sytytyskerran aikana. Toisaalta Risto voi salata jonkin lampun ja kytkimen yhteyden vain, jos lamppu käyttäytyy kaikissa painallusyhdistelmissä samoin kuin jokin toinen lamppu. Erilaisia painallusyhdistelmiä, joissa kaksi lamppua käyttäytyy samoin, on $2 \cdot 2^{2008}$. Näin ollen $2^{2009}+1$:n painallusyhdistelmän jälkeen Laura tietää kaikki yhteydet.

Jos Laura saa valita kytkimet, hän jakaa ne ensin kahteen yhtä suureen luokkaan A_1 ja A_2 ja painaa luokkaan A_1 kuuluvia kytkimiä. Nyt hän jakaa A_1:n ja A_2:n (lähes) yhtä suuriin luokkiin A_{11}, A_{12}; A_{21}, A_{22} ja painaa luokkiin A_{11} ja A_{21} kuuluvia kytkimiä. Nyt hän on saanut tietää kuhunkin luokan kytkimiin kuuluvat syttyvät lamput. Laura jatkaa samalla tavalla ja saa selville aina pienemmistä kytkinjoukoista niihin kuuluvat syttyvät lamput. Koska $2^{11} = 2048 > 2010$, yhdennentoista jaon luokat ovat enintään yhden kytkimen muodostamia; nyt Laura tietää jokaiseen kytkimeen kuuluvat lamput. Siten Laura selviää 11 valinnalla. – Kymmenen valintaa ei riitä, koska kahden lampun erottaminen toisistaan on mahdollista vain, jos niihin liittyvät kytkimet ovat jossain painelussa eri joukoissa, toinen "painetuissa", toinen "ei painetuissa". 2^k:n painelun jälkeen suurimmassa sellaisessa joukossa, jonka kytkimet ovat joka painalluksessa olleet samassa tilassa (painettuina tai ei-painettuina), on ainakin $\lceil 2010/2^k \rceil$ alkiota; kun $k = 10$, tämä luku on 2.

4. Jos $m = \sum_{k=0}^{n} t_k 10^k$, $0 \le t_k \le 9$, on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin voidaan valita yksinkertaiset luvut $s_1, s_2, \ldots, s_9$ niin, että $s_p = \sum_{k=0}^{n} e_k 10^k$ ja $e_k = 1$, kun $p \le t_k$ ja $e_k = 0$, kun $p > t_k$. Summassa $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_9$ jokaisen 10 potenssin kerroin on t_k, joten $s = m$. Vaadittu esitys syntyy siis aina ainakin 9:llä yksinkertaisella luvulla.

Osoitetaan sitten, että on olemassa lukuja, joita ei voi esittää vähemmällä kuin yhdeksällä yksinkertaisella luvulla. Olkoon esimerkiksi

$$m = 10203040506070809 = \sum_{k=1}^{9} k10^{18-2k}.$$

Oletetaan, että $m = s_1 + s_2 + \cdots + s_j - s_{j+1} - \cdots - s_n = b_1 - b_2$, missä $n < 9$, jokainen s_i on yksinkertainen, b_1 positiivisten ja b_2 negatiivisten termien summa. Luvun b_1 kaikki numerot ovat $\le j$ ja luvun b_2 kaikki numerot ovat $\le n - j$. Nyt $b_1 = m + b_2$. Ajatellaan viimeinen yhteenlasku suoritettavaksi tavallisena allekkain yhteenlaskuna ja katsotaan sitä saraketta, jossa on luvun m numero $j + 1$. Sen alapuolella on luvun b_2 numero x. Koska $n \le 8$, näiden numeroiden oikealla puolella on luku, joka on pienempi kuin

$$10^{15-2j} + 8 \sum_{k=0}^{15-2j} 10^k < 9 \sum_{k=0}^{15-2j} 10^k.$$

Muistinumeroa ei siis tule, ja $j + 1 + x \ge 10$ Siis $x \ge 9 - j$. Koska $x \le n - j$, on $n \ge 9$, mikä on ristiriidassa oletuksen $n < 9$ kanssa. Siis oletus $n < 9$ on hylättävä, ja on tullut todistetuksi, että kaikkia lukuja ei voida esittää alle yhdeksän yksinkertaisen luvun avulla.