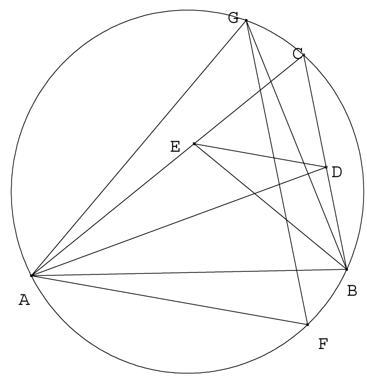
22. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

Ratkaisuja

1. Olkoot f, A, B ja C tehtävän mukaisia. Olkoon z jokin reaaliluku. Asetetaan $x = z - f(0)$ ja $y = 0$. Silloin $f(z) = f(z - f(0) + f(0)) = A(z - f(0)) + B\cdot 0 + C = Az - Af(0) + C$. On siis olemassa luvut a ja b niin, että $f(z) = az + b$ kaikilla reaaliluvuilla z. Täten $Ax + By + C = f(x + f(y)) = a(x + f(y)) + b = ax + a(ay + b) + b = ax + a^2y + (a + 1)b$. Mahdollisia kolmikkoja $(a,\ B,\ C)$ ocat siis kolmikot $(a,\ a^2,\ c)$, missä c on mielivaltainen ja $a \neq -1$ on mielivaltainen, sekä $(-1,\ 1,\ 0)$.

2. Osoitetaan induktiolla, että dominoivia pareja on vähintään $n - 3$ kappaletta. Jos $n = 3$, jokaiset kaksi henkilöä istuvat vierekkäin, joten dominoivien parien määrä on $0 = 3 - 3$. Oletetaan, että kun henkilöitä on n, dominoivia pareja on ainakin $n - 3$. Olkoon pöydän ääressä $n + 1$ henkilöä. Jos aakkosissa viimeinen istujista, sanokaamme Z, poistuu, Z:n kahta puolta istuneet henkilöt, jotka muodostivat dominoivan parin, eivät enää ole dominoiva pari. Jokainen muu dominoiva pari on edelleen dominoiva, sillä tällaisen parin dominoivuus on perustunut siihen, että heidän välissään on muitakin aakkosissa myöhempiä kuin Z. Koska n:n istujan joukossa oli ainakin $n - 3$ dominoivaa parin, on $n+1$:n istujan joukossa ainakin $n - 3 + 1 = (n + 1) - 3$ dominoivaa paria. – Toisaalta, koska sama prosessi, aakkosissa viimeisen poistuminen joukosta, vähentää dominoivia pareja tasan yhdellä ja 3:n joukossa ei ole dominoivia paareja, on dominoivien parien määrän oltava tasan $n - 3$, eli $n - 3$ on todella dominoivien parien pienin mahdollinen määrä.

3. Koska $FG \| BC$, $\angle FGB = \angle GBC$; kehäkulmalauseesta seuraa nyt, että $\angle GAC = \angle BAF$ ja siis $\angle GAB = \angle CAF = \angle CED$, (koska $ED \| AF$). Lisäksi kehäkulmalauseen nojalla $\angle AGB = \angle ACB$. Siis kolmiot ABG ja EDC ovat yhdenmuotoiset. Koska AD on kulman CAB puolittaja,



$$DC = \frac{AC}{AC + AB} \cdot BC.$$

koska BE on kulman ABC puolittaja,

$$EC = \frac{BC}{AB + BC} \cdot AC.$$

Mutta väite seuraa nyt edellä todistetusta kolmioiden yhdenmuotoisuudesta:

$$\frac{AG}{BG} = \frac{EC}{DC} = \frac{AC + AB}{AB + BC}.$$

4. Oletamme, että $(m+1)^3 - m^3 = n^2$. Silloin n on pariton ja $4(3m^2+3m+1) = (2n)^2$ ja $3((2m)^2 + 2\cdot 2m + 1) = (2n)^2 - 1$ eli $3(2m+1)^2 = (2n-1)(2n+1)$. Jos parittomilla luvuilla $2n-1$ ja $2n+1$ olisi yhteinen tekijä, se olisi lukujen erotuksen 2 tekijä ja siis 2. Yhteisiä tekijöitä ei ole, joten toinen luvuista on parittoman luvun neliö ja toinen jaettuna 3:lla on neliö. Jos olisi $2n+1 = (2t+1)^2$, olisi $2n = 4t^2 + 4t$, ja n olisi parillinen. Siis on oltabva $2n - 1 = (2t+1)^2$ eli $n = 2t^2 + 2t + 1 = t^2 + (t+1)^2$.