Vuoden 2000 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Olkoon x kolmen eri yhteenlaskettavan summien lukumäärä ja y kahden eri yhteenlaskettavan summien lukumäärä. Tarkastellaan riviä, jossa on 3999 numeroitua laatikkoa ja jokaisessa paritonnumeroisessa laatikossa on punainen pallo. Jokainen tapa sijoittaa kaksi sinistä palloa parillisnumeroisiin laatikkoihin tuottaa 2000:n jaon kolmeksi yhteenlaskettavaksi. Tapoja sijoittaa siniset pallot on $\binom{1999}{2} = 999 \cdot 1999$. Mutta on $3! = 6$ eri sijoittelua, jotka tuottavat saman 2000:n jaon kolmeksi eri yhteenlaskettavaksi ja $\frac{3!}{2} = 3$ eri jakoa, jotka tuottavat saman 2000 jaon, jossa eri suuria yhteenlaskettavia on kaksi. Koska 2000 ei ole jaollinen kolmella, kaikki sijoittelut antavat joko kolme tai kaksi eri suurta yhteenlaskettavaa. Siis $6x + 3y = 1999 \cdot 999$. Mutta $y = 999$, koska summassa kaksi kertaa esiintyvän yhteenlaskettavan arvo voi olla mikä hyvänsä luvuista $1, 2, \ldots 999$. Ratkaisemalla edellinen yhtälö saadaan $x = 998 \cdot 333$, joten $x + y = 1001 \cdot 333 = 333333$.

2. Oletetaan, että P_n:llä on alkuaan m kolikkoa. Silloin P_{n-1}:llä on $m + 1$ kolikkoa, ... ja P_1:llä $m + n - 1$ kolikkoa. Joka siirrossa henkilö saa k kolikkoa ja antaa pois $k + 1$ kolikkoa, joten hän menettää yhteensä yhden kolikon. Ensimmäisen kierroksen jälkeen, kun P_n on antanut n kolikkoa P_1:lle, P_n:llä on $m - 1$ kolikkoa, P_{n-1}:llä m kolikkoa jne., kahden kierroksen jälkeen P_n:llä on $m - 2$ kolikkoa, P_{n-1}:llä $m - 1$ kolikkoa jne. Näin voidaan jatkaa m:n kierroksen ajan, jonka jälkeen P_n:llä ei ole rahaa, P_{n-1}:llä on yksi kolikko jne. Kierroksella $m+1$ jokainen, jolla on kolikoita, voi ottaa niitä vastaan ja antaa edelleen kuten aikaisemminkin. Rahaton P_n ei voi enää antaa pois kolikoita. Hän saa $n(m + 1) - 1$ kolikkoa P_{n-1}:ltä, muttei voi antaa $n(m + 1)$:ää kolikkoa p_1:lle. P_{n-1}:llä ei ole kolikoita ja P_1:llä on $n - 2$ kolikkoa. Ainoa naapuruspari, joista toisella voi olla 5 kertaa niin monta kolikkoa kuin toisella, on (P_1, P_n). Koska $n - 2 < n(m + 1) - 1$, on oltava $5(n - 2) = n(m + 1) - 1$ eli $n(4 - m) = 9$. Koska $n > 1$, on oltava $n = 3$, $m = 1$ tai $n = 9$, $m = 3$. Kokeilemalla nähdään, että molemmat vaihtoehdot ovat mahdollisia. Ensimmäisessä tapauksessa kolikoiden määrä on $3+2+1 = 6$, toisessa $11+10+\cdots+3 = 63$.

3. Tarkastellaan kolmioita AOE ja AOD. Niissä on kaksi keskenään yhtä suurta sivuparia ja toista vastinsivuparia vastassa olevat kulmat ovat yhtä suuret. Tällöin joko AOE ja AOD ovat yhteneviä tai $\angle AEO = 180° - \angle ADO$. Edellisessä tapauksessa $\angle BEO = \angle CDO$, joten kolmiot EBO ja DCO ovat yhteneviä. Tällöin siis $AB = AC$. Jälkimmäisessä tapauksessa merkitään kolmion ABC kulmia 2α:lla, 2β:lla, ja 2γ:lla ja kulmaa AEO δ:lla. Kolmion kulman vieruskulmaa koskevan lauseen nojalla saadaan $\angle BOE = \angle DOC = \beta + \gamma$, $\delta = 2\beta + \gamma$ ja $180° - \delta = \beta + 2\gamma$. Kun nämä yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $3(\beta + \gamma) = 180°$ eli $\beta + \gamma = 60°$. Kun tämä yhdistetään yhtälöön $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180°$, saadaan $2\alpha = 60°$.

4. Merkitään $f\left(\frac{1}{3}\right) = a$ ja $f\left(\frac{2}{3}\right) = b$. Soveltamalla tehtävän epäyhtälöä arvoilla $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ ja $z = 1$ sekä $x = 0$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$ saadaan

$$\frac{1}{2} \le \frac{1-b}{b-a} \le 2, \qquad \frac{1}{2} \le \frac{b-a}{a} \le 2.$$

Jos olisi $a < 0$, olisi $b - a < 0$ ja siis $b < 0$. Lisäksi olisi $1 - b < 0$ eli $b > 1$. Samanlaiseen ristiriitaan johtaisi oletus $b - a < 0$. Siis $a > 0$ ja $b - a > 0$, joten

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\right) \le a \le \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\right)$$

eli $a \le 2b - 2a$, $b - a \le 2a$, $b - a \le 2 - 2b$ ja $1 - b \le 2b - 2a$. Näistä yhtälöistä 1. ja 3. antavat $3a \le 2b$ ja $3b \le 2 + a$, joista eliminoimalla b saadaan $3a \le \dfrac{4}{3} + \dfrac{2a}{3}$, $a \le \dfrac{4}{7}$. Yhtälöistä 4. ja 2. antavat vastaavasti $1 + 2a \le 3b$ ja $b \le 3a$, joista $1 \le 7a$, $\dfrac{1}{7} \le a$. [Rajoja voidaan parantaa – tarkat ala- ja ylärajat olisivat $\dfrac{4}{27}$ ja $\dfrac{76}{135}$.]