Vuoden 1999 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Jos $n \geq 2005$, niin $f(n) = n - 5 \geq 2000$. Olkoon $1 \leq k \leq 4$. Silloin

$$2000 - k = f(2005 - k) = f(f(2010 - k)) = f(1999 - k) = f(f(2004 - k)) = f(1993 - k).$$

Sijoitetaan $k = 1$. Saadaan $1999 = f(2004) = f(1998) = f(1992)$. Lisäksi $1995 = f(2000) = f(f(2005)) = f(1994)$ ja $f(1993) = f(f(2004)) = f(1999) = f(f(2010)) = f(2005) = 2000$. On siis osoitettu, että $2000 - k = f(1999 - k)$, kun $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ja $2000-k = f(1993-k)$, kun $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Osoitetaan, että $f(6n+1-k) = 2000-k$,kun $n \leq 333$ ja $0 \leq k \leq 5$. Tämä on jo näytetty toteen, kun $n = 333$ ja $n = 332$. Oletetaan, että väite pätee, kun $n = m+2$ ja $n = m+1$. Silloin $f(6m+1-k) = f(f(6m+12-k)) = f(f(6(m+2)+1-(k+1)) = f(2000-k-1) = f(1999-k) = 2000-k$, kun $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ja $f(6m+1-5) = f(6m-4) = f(f(6m+7)) = f(f(6(m+1)+1)) = f(2000) = 1995 = 2000-5$. Siis väite pätee, kun $n = m$. Kaiken kaikkiaan siis $1999 = 2000 - 1 = f(6n)$, jos ja vain jos $n = 1, 2, \ldots, 334$.

2. On helppo antaa esimerkkejä vaaditunlaisista seitsenkulmioista $ABCDEFG$, joissa kaksi kulmaa on $120°$. Nämä kaksi kulmaa eivät kuitenkaan voi liittyä seitsenkulmion viereisiin kärkiin: tällainen konfiguraatio olisi symmetrinen kärkien välisen sivun keskinormaalin suhteen, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että seitsenkulmion kaikki sivut ovat eripituisia. Jos $120°$ kulmia olisi kolme, niiden tulisi sijaita (esim.) kärjissä A, C ja E. Koska $120°$ kehäkulmaa vastaa $240°$ keskuskulma, kaaret GAB, BCD ja DEF ovat kukin $360° - 240° = 120°$. Koska kaaret ovat erillisiä, ne peittävät koko ympyrän, joten $F = G$, ja seitsenkulmio surkastuu kuusikulmioksi. $120°$ kulmia voi siis olla enintään kaksi.

3. Jos lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on d, niin origosta voidaan päästä vain pisteisiin, joiden koordinaatit ovat jaollisia d:llä. On oltava $d = 1$. Jos $a + b$ on parillinen, niin kaikki pisteet (x, y), joihin orogosta pääsee, ovat sellaisia, että $x + y$ on parillinen. Osoitetaan, että jos $d = 1$ ja $a + b \equiv 1 \bmod 2$, niin kaikkiin pisteisiin pääsee. Voidaan olettaa, että $a \geq 1$ ja $b \geq 1$, sillä jos $ab = 0$, voi olla $d = 1$ vain jos toinen luvuista a, b on nolla ja toinen 1. Näillä luvuilla kaikkiin pisteisiin pääseminen onnistuu. Koska $d = 1$, on olemassa positiiviset luvut r ja s siten, että joko $ra - sb = 1$ tai $sb - ra = 1$. Oletetaan, että $ra - sb = 1$. Jos tehdään r siirtoa $(x, y) \to (x + a, y + b)$ ja r siirtoa $(x, y) \to (x + a, y - b)$, tullaan pisteestä (x, y) pisteeseen $(x + 2ra, y)$. Jos tämän jälkeen tehdään s siirtoa $(x, y) \to (x - b, a)$ ja s siirtoa $(x, y) \to (x - b, -a)$, tullaan pisteeseen $(x + 2ra - 2sb, y) = (x + 2, y)$. Samoin voidaan konstruoida siisrtosarjat pisteestä (x, y) pisteisiin $(x - 2, y)$, $(x, y + 2)$, $(x, y - 2)$. Origosta päästään siis kaikkiin pisteisiin, joiden molemmat koordinaatit ovat parillisia. Luvuista a, b tasan toinen on pariton; olkoon $a = 2k + 1$, $b = 2m$. Siirto $(x, y) \to (x + a, y + b) = (x + 1 + 2k, y + 2m)$, jota seuraa k siirtosarjaa $(x, y) \to (x - 2, y)$ ja m siirtosarjaa $(x, y) \to (x, y - 2)$ johtaa pisteeseen $(x + 1, y)$. Samalla tavalla päästään pisteestä (x, y) pisteisiin $(x - 1, y)$ ja $(x, y \pm 1)$. Näin ollen origosta pääsee kaikkiin pisteisiin.

4. Todistettava epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{1+a_1}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\le\frac{n\left(\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)}{n+\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}.$$

Tämä on edelleen yhtäpitävä epäyhtälön

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a_1^{-1}}+1}+\cdots+\frac{1}{\dfrac{1}{a_n^{-1}}+1}\le\frac{n}{\dfrac{1}{\dfrac{a_1^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}}+1} eqno(1)$$

kanssa. Tarkastellaan funktiota

$$f(x)=\frac{1}{\dfrac{1}{x}+1}=\frac{x}{1+x}.$$

Osoitetaan, että f on ylöspäin kupera eli että

$$tf(x)+(1-t)f(y)<f(tx+(1-t)y)$$

kaikilla $t\in(0,\,1)$. Epäyhtälö

$$t\frac{x}{1+x}+(1-t)\frac{y}{1+y}<\frac{tx+(1-t)y}{1+tx+(1-t)y}$$

sievenee muotoon

$$t^2(x-y)^2<t(x-y)^2,$$

koska $0<t<1$, jälkimmäinen epäyhtälö on tosi. [Toinen tapa:

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2},\quad f''(x)=-\frac{2}{(1+x)^3}<0.$$

Jos toinen derivaatta on negatiivinen, funktion kuvaaja on ylöspäin kupera.] Ylöspäin kuperalle funktiolle pätee

$$\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))\le f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right),$$

ja tässä yhtäsuuruus vain, jos $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Näin ollen (1) on tosi, ja yhtäsuuruus vallitsee, kun kaikki a_i:t ovat yhtä suuria.