Vuoden 1998 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Kun yhtälöön sijoitetaan $x = y = 0$, saadaan $2f(0) = 4f(0)$, joten $f(0) = 0$. Olkoon sitten $y = nx$, missä n on luonnollinen luku. Nyt saadaan

$$f((n+1)x) = 2f(x) + 2f(nx) - f((n-1)x).$$

Tästä saadaan $f(2)x = 2f(x) + 2f(x) - f(0) = 4f(x)$, $f(3x) = 2f(x) + 2f(2x) - f(x) = 9f(x)$, Todistetaan, että $f(nx) = n^2 f(x)$. Käytetään induktiota. Kaava on tosi, kun $n = 1$. Oletetaan, että $f(kx) = k^2 f(x)$, kun $k \leq n$. Tällöin

$$f((n+1)x) = 2f(x) + 2f(nx) - f((n-1)x) = (2 + 2n^2 - (n-1)^2)f(x) = (n+1)^2 f(x).$$

Siis $f(nx) = n^2 f(x)$. Kun $x = 1/q$, $f(1) = f(qx) = q^2 f(x)$, so $f(1/q) = f(1)/q^2$. Tästä seuraa $f(p/q) = p^2 f(1/q) = (p/q)^2 f(1)$, joten $f(x) = ax^2$ jollekin rationaaliluvulle a. Kääntäen, jos $f(x) = ax^2$, niin $f(x+y)+f(x-y) = a(x+y)^2 + a(x-y)^2 = 2ax^2 + 2ay^2 = 2f(x) + 2f(y)$, joten $f(x) = ax^2$ on yhtälön ratkaisu.

2. Kun lasketaan pisteen P potenssi ympyröiden C_1 ja C_2 suhteen, saadaan $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF$. Koska M_1P on kohtisuorassa jännettä CD vastaan, P:n on oltava CD:n keskipiste, joten $PC = PD$. Samoin saadaan $PE = PF$. Kaiken kaikkiaan $PC = PD = PE = PF = \sqrt{PA \cdot PB}$. Koska C, D, E ja F ovat kaikki P-keskisellä ympyrällä, jonka halkaisijoita ovat CD ja EF, niin kulmat $\angle ECF$, $\angle CFD$ jne. ovat kaikki suoria. $CDEF$ on suorakaide.

3. (a) Oletetaan, että $x_1, \ldots, x_n$ on tehtävässä vaadittu jono. Silloin $x_1 + \cdots + x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Tämä summa on jaollinen n:llä, mikä on mahdollista vain, kun n on pariton, jolloin $\dfrac{(n+1)}{2}$ on kokonaisluku. Jos $n = 2m$, niin $\dfrac{n(n+1)}{2} = m(2m+1) = 2m^2 + m \equiv m \bmod 2m$. Oletetaan nyt, että $n = 2m+1 > 1$. Vaaditaan, että $n - 1 = 2m$ on tekijänä luvussa $x_1+\cdots+x_{n-1}$. Koska $x_1+\cdots+x_{n-1} = (m+1)(2m+1) - x_n =\equiv m+1-x_n \bmod 2m$, ja $1 \leq x_n \leq n$, niin $x_n = m+1$. Seuraavaksi vaaditaan, että $n - 2 = 2m - 1$ on tekijänä luvussa $x_1 + \cdots + x_{n-2}$. Koska $x_1 + \cdots + x_{n-2} = (m+1)(2m+1) - x_n - x_{n-1} \equiv m + 1 - x_{n-1} \bmod 2m - 1$ ja $-m \leq m + 1 - x_{n-1} \leq m$, on $x_{n-1} = m + 1 \bmod 2m - 1$. Jos $n > 3$ eli $m \geq 1$, on $x_{n-1} = m + 1 = x_n$, mikä on ristiriita. Siis $n = 1$ ja $n = 3$ ovat ainoat mahdollisuudet. Jos $n = 1$, $x_1 = 1$ on kelvollinen jono. Jos $n = 3$, on oltava $x_3 = 2$. x_1 ja x_2 ovat 1 ja 3 kummassa tahansa järjestyksessä.

(b) Olkoon $x_1 = 1$. Määritellään jono palautuskaavan avulla. Oletetaan, että $x_1, \ldots, x_{n-1}$ on valittu ja että näiden lukujen summa on A. Olkoon m pienin positiivinen kokonaisluku, jota ei vielä ole käytetty. Jos asetetaan $x_{n+1} = m$, x_n:llä on kaksi rajoitusta:

$$A + x_n \equiv 0 \bmod n \quad \text{ja} \quad A + x_n + m \equiv 0 \bmod n + 1.$$

Koska n ja $n+1$ ovat yhteistekijättömiä, on olemassa y, jolle pätee $y \equiv -A \bmod n$, $y \equiv -A - m \bmod n + 1$ ("kiinalainen jäännöslause") Jos y:hyn lisätään tarpeeksi suuri

$n(n+1)$:n monikerta, saadaan luku, jota ei vielä ole käytetty jonoon. Täten jonoa voidaan aina jatkaa kahdella termillä, ja se tulee sisältämään jokaisen kokonaisluvun.

4. Kun kirjoitetaan Pascalin kolmio mod 2:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & \\
1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1,
\end{array}
$$

havaitaan, että rivi 1 sisältää kaksi rivin 0 kopiota, rivit 2 ja 3 sisältävät kaksi rivien 1 ja 2 kopiota jne.

Pascalin kolmion perusominaisuudesta $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$ seuraa, että jos rivin k kaikki luvut ovat $\equiv 1 \mod 2$, niin rivillä $k+1$ tasan ensimmäinen ja viimeinen luku on $\equiv 1 \mod 2$. Jos k:nnella rivillä vain ensimmäinen ja viimeinen luku ovat $\equiv 1 \mod 2$, niin rivit k, $k+1$, $\ldots$, $2k-1$ muodostuvat kahdesta rivien $0, 1, \ldots k-1$ kopiosta. Koska rivillä 0 on luku 1, rivi 1 on kahden ykkösen muodostama, 2 ja 3 ovat kahden rivien 0 ja 1 muodostaman kolmion kopioita jne. Tästä päätellään induktiolla, että kaikilla k rivi 2^k-1 muodostuu pelkistä ykkösistä (siinä on kaksi kopiota rivistä $2^{k-1}-1$ ja rivi $2^1-1=0$ on pelkkä ykkönen). Täten rivi 2^k muodostuu nollista ja päissä olevista ykkösistä. Tästä seuraa edelleen, että rivit 2^k, 2^k+1, $\ldots$. $2^{k+1}-1$ ovat kaksi kopiota riveistä 0, 1, $\ldots 2^k-1$. Olkoon N_n rivin, $n = 2^k+m$, $m < 2^k$, parittomien lukujen määrä. Silloin $N_1 = 2$ ja $N_n = 2N_m$. Siis N_n on aina kakkosen potenssi. Todetaan vielä, että $N_n = 2^p$, missä p on n:n binääriesityksen ykkösten lukumäärä $y(n)$. Koska $N_0 = 1 = 2^{y(0)}$, kaava pätee, kun $n = 0$. Luvun $n = 2^k + m$ binääriesityksessä on yksi ykkönen enemmän kuin luvun m binääriesityksessä. Toisaalta $N_n = 2N_m = 2 \cdot 2^{y(m)} = 2^{y(m)+1} = 2^{y(n)}$.

On vielä osoitettava, että $\binom{2^k}{p} \equiv 1$ vain, kun $p = 0$ tai $p = 2^k$. Tämä seuraa esimerkiksi siitä, että $\binom{2^k-1}{p} \equiv 1$ kaikilla p, mikä taas seuraa edellisestä induktiosta.