Vuoden 1997 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Olkoot $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_7$ joukon A alkiot. Jos $(a_i,\, a_j,\, a_k)$ on tehtävän mukainen kolmikko, niin $a_i < a_j < a_i + a_j = a_k$. Pareja $(a_i,\, a_j)$, joille pätee $a_i + a_j = a_k$ on enintään $k - 1$ kappaletta. Pareja, joille lisäksi pätee $a_i < a_j$, on enintään $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ kappaletta. Pareja on siis enintään

$$\sum_{k=3}^{7} \left[\frac{k-1}{2}\right] = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$$

kappaletta. Arvo 9 saavutetaan, kun $A = \{1,\, 2,\, \ldots,\, 7\}$, sillä tässä tapauksessa kolmikot $(1,\, 2,\, 3)$, $(1,\, 3,\, 4)$, $(1,\, 4,\, 5)$, $(1,\, 5,\, 6)$, $(1,\, 6,\, 7)$, $(2,\, 3,\, 5)$, $(2,\, 4,\, 6)$, $(2,\, 5,\, 7)$ ja $(3,\, 4,\, 7)$ täyttävät tehtävän ehdot.

2. Oletamme ensin, että P ei ole lävistäjällä AC ja että suora BP leikkaa lävistäjän AC pisteessä M. Olkoot S ja T pisteistä A ja C suoralle BP piirrettyjen kohtisuorien ja suoran BP leikkauspisteet. Koska kolmioilla APB ja CBP on sama ala, on $AS = CT$. Jos $S \neq T$, niin suorakulmaiset kolmiot ASM ja CTM ovat yhtenevät (kks), joten $AM = CM$. Jos taas $S = T$, on $AC \perp PB$ ja $S = M = T$, jolloin myös $AM = CM$. Joka tapauksessa M on lävistäjän AC keskipiste. Täsmälleen samoin todistetaan, että suora DP leikkaa AC:n tämän keskipistessä eli pisteessä M. Siis toisaalta B, M ja P, toisaalta D, M ja P ovat samalla suoralla. Siis M on suoralla DB, eli lävistäjä BD jakaa lävistäjän AC kahteen yhtä suureen osaan. Oletamme sitten, että P on lävistäjällä AC. Silloin P on AC:n keskipiste. Jos P ei ole lävistäjällä BD, päätellään samoin kuin edellä, että AC jakaa BD:n kahteen yhtä suureen osaan. Jos P taas on myös lävistäjällä BD, se on molempien lävistäjien yhteinen keskipiste.

3. Jos kolmella a-pituisella janalla on sama kärki, esim. A, niin kolme muuta pistettä sijaitsevat A-keskisellä a-säteisellä ympyrällä ja ovat b-sivuisen tasasivuisen kolmion kärkinä. Tällöin A on kolmion BCD keskipiste, ja

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{\dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}b} = \sqrt{3}.$$

Oletetaan sitten, että pisteestä A lähtee ainakin yksi a-pituinen ja ainakin yksi b-pituinen jana. Oletetaan, että $AB = a$, $AD = b$. Ei ole mahdollista, että joka pisteestä lähtisi vain yksi a-pituinen jana (a-pituisten janojen lukumäärä on puolet pisteistä lähtevien a-pituisten janojen lukumäärästä, koska jokainen jana tulee lasketuksi molempien päätepisteidensä kohdalla. Voidaan siis olettaa, että A:stä lähtee toinenkin a-pituinen jana, AC. Jos nyt olisi $BC = a$, olisi ABC tasasivuine kolmio ja D olisi samalla etäisyydellä b sen kaikista kärjistä. Tämä ei voi tulla kyseeseen, koska $b > a$. Siis $BC = b$ Janoista CD ja BD toisen pituus on a. Voimme olettaa, että tämä jana on DC. Janat DC ja AB ovat joko eri tai samalla puolella suoraa AC. Jälkimmäisessä tapauksessa $ABCD$ on suunnikas, jonka kaksi sivuparia on a-pituisia, kaksi b-pituisia ja lävistäjien pituudet ovat a ja b. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa $(a^2 + b^2)$ on sama kuin sivujen neliöiden summa $(2a^2 + 2b^2)$. Voimme siis olettaa, että

$BACD$ on kupera nelikulmio. Olkoon $\angle ABC = \alpha$ ja $\angle ADB = \beta$. Tasakylkistä kolmiosta saadaan esimerkiksi $\angle CBD = \beta$, ja erityisesti kolmiosta ABD $2\alpha + 2\beta + \beta = \pi$ sekä $\angle CDA = \alpha$, $\angle DCB = \frac{1}{2}(\pi - \beta)$, $\angle CAD = \alpha$. Kolmiosta ADC saadaan näin ollen $\alpha + \alpha + \alpha + \frac{1}{2}(\pi - \beta) = \pi$. Kun ratkaistaan, saadaan $\alpha = \frac{1}{5}\pi = 36^\circ$. Kolmiosta ABC saadaan nyt sinilauseen avulla

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

(Itse asiassa a on nyt säännöllisen viisikulmion sivu ja b sen lävistäjä.) – Toinen tapa löytää suhde $\dfrac{b}{a}$ on tarkastella puolisuunnikasta $CDBA$, jossa $CD \| AB$; jos E on pisteen B kohtisuora projektio janalla CD, niin $CE = b - \dfrac{1}{2}(b-a) = \dfrac{1}{2}(b+a)$, ja suorakulmaisesta kolmiosta BCE ja DCE saadaan $CE^2 = b^2 - \left(\dfrac{b+a}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$, joka sievenee muotoon $b^2 - ab - a^2 = 0$ ja edelleen $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\dfrac{5+1}{2}}$.

4. Kun x on parillinen, niin $f(x)$ on parillinen, kun x on pariton, niin $f(x)$ on pariton. Lisäksi, jos $x \equiv 1 \mod 4$, niin $f(x) \equiv 3 \mod 4$ ja jos $x \equiv 3 \mod 4$, niin $f(x) \equiv 1 \mod 4$. Selvästi $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 6$ ja $f(3) = 5$. Todistetaan seuraava väite. Jos $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, kun $x, y < k$, niin $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, kun $x, y < 2k$. Oletetaan siis, että x ja y ovat pienempiä kuin $2k$ ja että $f(x) = f(y)$. Jos nyt $f(x)$ on parillinen, niin $x = 2t$, $y = 2u$, ja $2f(t) = 2f(u)$. Koska t ja u ovat pienempiä kuin k, on $t = u$, joten $x = y$. Oletetaan sitten, että $f(x) \equiv 1 \mod 4$. Silloin $x \equiv 3 \mod 4$; $x = 4u - 1$, ja $f(x) = 2f(2u-1) - 1$. Vastaavasti $y = 4t - 1$ ja $f(y) = 2f(2t-1) - 1$. Lisäksi $2u - 1 < \frac{1}{2}(4u-1) < k$ ja $2t - 1 < k$, joten $2u - 1 = 2t - 1$, $u = t$ ja $x = y$. Jos viimein $f(x) \equiv 3 \mod 4$, niin $x = 4u + 1$, $y = 4t + 1$, $u < k$, $t < k$, $4f(u) + 3 = 4f(t) + 3$, $u = t$, $x = y$. Koska kaikille x ja y on olemassa n siten, että suurempi luvuista x ja y on $< 2^n \cdot 3$, edellinen päättely osoittaa, että $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.