10. pohjoismainen kilpailu 11. 4. 1996

1. Todista, että on olemassa 1996:lla jaollinen kokonaisluku, jonka kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summa on 1996.

2. Määritä kaikki reaaliluvut x, joille

$$x^n + x^{-n}$$

on kokonaisluku kaikilla kokonaisluvuilla n.

3. Ympyrä, jonka halkaisija on kolmion ABC kärjestä A piirretty korkeusjana, leikkaa kolmion sivun AB pisteessä D ja sivun AC pisteessä E ($A \neq D$, $A \neq E$). Osoita, että kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion ADE kärjestä A piirretyllä korkeusjanalla tai sen jatkeella.

4. Reaaliarvoinen funktio f on määritelty positiivisten kokonaislukujen joukossa, ja positiivinen kokonaisluku a toteuttaa ehdot

$$f(a) = f(1995), \qquad f(a+1) = f(1996), \qquad f(a+2) = f(1997)$$

$$f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1} \quad \text{kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla } n.$$

(i) Osoita, että $f(n+4a) = f(n)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

(ii) Määritä pienin mahdollinen a.