Vuoden 1995 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. *1. ratkaisu.* Piirretään PB. Puoliympyrän sisältämää kehäkulmaa koskevan lauseen nojalla $\angle RPB = \angle APB = 90^\circ$. Täten P ja Q ovat molemmat ympyrällä, jonka halkaisija on BR. Koska $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle RPQ = \angle CPA = 45^\circ$. Siis myös $\angle RBQ = 45^\circ$, ja RBQ on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, eli $|BQ| = |QR|$.

2. ratkaisu. Asetetaan $O = (0, 0)$, $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, $P = (t, u)$, $t > 0$, $u > 0$, $t^2 + u^2 = 1$. Suoran CP yhtälö on $y - 1 = \dfrac{u-1}{t}x$. Näin ollen $Q = \left(\dfrac{t}{1-u}, 0\right)$ ja $|BQ| = \dfrac{t}{1-u} - 1 = \dfrac{t+u-1}{1-u}$. Toisaalta suoran AP yhtälö on $y = \dfrac{u}{t+1}(x+1)$, joten pisteen R y-koordinaatti ja samalla $|QR|$ on $\dfrac{u}{t+1}\left(\dfrac{t}{1-u} + 1\right) = \dfrac{ut + u - u^2}{(t+1)(1-u)} = \dfrac{ut + u - 1 + t^2}{(t+1)(1-u)} = \dfrac{u+t-1}{1-u}$. Väite on todistettu.

2. *1. ratkaisu.* Olkoon S_n $2n$-numeroisten hyväksyttyjen jonojen joukko. Jaetaan S_n osajoukoiksi A_n, B_n, C_n ja D_n, joiden alkioina ovat yhdistelmiin 00, 01, 10, ja 11 päättyvät jonot. Merkitään joukon S_n alkioiden lukumäärää x_n:llä, A_n:n alkioiden lukumäärää a_n:llä, B_n:n b_n:llä, C_n:n c_n:llä ja D_n:n d_n:llä. Lasketaan x_6. Koska $S_1 = \{00, 01, 10, 11\}$, $x_1 = 4$ ja $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1$. Jokainen A_{n+1}:n alkio saadaan joko B_n:n tai D_n:n alkiosta lisäämällä loppuun 00. Siis $a_{n+1} = b_n + d_n$. Vastaavasti B_{n+1}:n alkiot saadaan B_n:n, C_n:n ja D_n:n alkioista liittämällä loppuun 01, ja kääntäen. Siis $b_{n+1} = b_n + c_n + d_n$. Samoin nähdään oikeiksi palautuskaavat $c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$ ja $d_{n+1} = a_n + c_n$. Siis $a_{n+1} + d_{n+1} = (b_n + d_n) + (a_n + c_n) = x_n$ ja $x_{n+1} = 2a_n + 3b_n + 3c_n + 2d_n = 3x_n - (a_n + b_n) = 3x_n - x_{n-1}$. Lähtemällä alkuarvoista $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1$ saadaan $a_2 = d_2 = 2$, $b_2 = c_2 = 3$, $x_2 = 10$. Näin ollen $x_3 = 26$, $x_4 = 3 \cdot 26 - 10 = 68$, $x_5 = 3 \cdot 68 - 26 = 178$ ja $x_6 = 3 \cdot 178 - 68 = 466$.

2. ratkaisu Jokainen tapa kirjoittaa luku 12 ykkösien ja kakkosien summana vastaa tasan kahta hyväksyttävää jonoa (eri yhteenlaskettavien järjestykset lasketaan erikseen). Summia, joissa on 12 ykköstä on 1, summia, joissa on yksi kakkonen ja 10 ykköstä on $\binom{11}{10}$ jne. Hyväksyttäviä jonoja on yhteensä

$$2 \cdot \sum_{k=0}^{6} \binom{12-k}{2k} = 2 \cdot (1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1) = 466.$$

3. Merkitään I:llä niiden indeksien i joukkoa, joille $x_i \geq 0$ ja J:llä niiden indeksien i joukkoa, joille $x_i < 0$. Oletetaan, että $M < \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. Silloin $I \neq \{1, 2, \ldots, n\}$, koska muutoin pätisi $|x_i| = x_i \leq \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ jokaiselle i ja olisi $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \dfrac{1}{n-1} \leq 1$. Siis

$\sum_{i\in I} x_i^2 < (n-1)\cdot\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n}$ ja $\sum_{i\in I} x_i < (n-1)\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}} = \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$. Koska

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i\in I} x_i - \sum_{i\in J} |x_i|,$$

on oltava $\sum_{i\in J} |x_i| \le \sum_{i\in I} x_i < \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$ and $\sum_{i\in J} x_i^2 \le \left(\sum_{i\in J}|x_i|\right)^2 < \dfrac{n-1}{n}$. Mutta silloin

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i\in I} x_i^2 + \sum_{i\in J} x_i^2 < \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1,$$

ja on tultu ristiriitaan. – Yhtäsuuruuden $M = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ mahdollisuuden toteamiseksi valitaan $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ja $x_n = -\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (n-1)\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} = 0$$

ja

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (n-1)\cdot\frac{1}{n(n-1)} + \frac{n-1}{n} = 1.$$

On vielä näytettävä, että yhtäsuuruuteen ei päästä kuin edellä esitellyssä tapauksessa. Olkoon siis $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$, kun $i = 1, \ldots, p$, $x_i \ge 0$, kun $i \le q$, ja $x_i < 0$, kun $q+1 \le i \le n$. Samoin kuin yllä saadaan

$$\sum_{i=1}^{q} x_i \le \frac{q}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad \sum_{i=q+1}^{n} |x_i| \le \frac{q}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad \sum_{i=q+1}^{n} x_i^2 \le \frac{q^2}{n(n-1)},$$

joten

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \frac{q+q^2}{n^2-n}.$$

On helppo nähdä, että $q^2 + q < n^2 + n$, kun $n \ge 2$ ja $q \le n-2$, mutta $(n-1)^2 + (n-1) = n^2 - n$. Välttämätöntä sille, että $M = \dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ on siis se, että jonossa on vain yksi negatiivinen termi. Mutta jos positiivisissa termeissä on yksikin, joka on $< M$, on

$$\sum_{i=1}^{n} < \frac{q+q^2}{n(n-1)},$$

joten tehtävän ehdot eivät toteudu. Yhtäsuuruus on siis voimassa vain, kun $n-1$ luvuista x_i on $\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ ja viimeinen $\dfrac{1-n}{\sqrt{n(n-1)}}$.

4. Olkoon $n \geq 3$ ja olkoot $n-1$, n, $n+1$ kolmion sivut. Kolmion piirin puolikas on $\dfrac{3n}{2}$. Heronin kaavan perusteella kolmion ala on

$$T = \sqrt{\frac{3n}{2} \cdot \left(\frac{3n}{2} - n + 1\right)\left(\frac{3n}{2} - n\right)\left(\frac{3n}{2} - n - 1\right)} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(n^2-4)}.$$

Jos $n = 4$, niin $T = 6$. On siis olemassa ainakin yksi vaaditunkaltainen kolmio. Olkoon n parillinen luku ja olkoon $\dfrac{3}{4}(n^2-4)$ neliöluku. Asetetaan $m = n^2 - 2 > n$. Silloin myös m on parillinen ja $m^2 - 4 = (m+2)(m-2) = n^2(n^2-4)$. Näin ollen $\dfrac{3}{4}(m^2-4)$ on sekin neliöluku. Lisäksi $T = \dfrac{m}{2}\sqrt{\dfrac{3}{4}(m^2-4)}$ on kokonaisluku. Väite on todistettu.