Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailun ratkaisut

18. 1. 2019

1. *Ratkaise, mille luvuille x on voimassa*

$$x(8\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) \le 11\sqrt{1+x}-16\sqrt{1-x},$$

kun $0 < x \le 1$.

Kun $0 < x \le 1$, niin $1-x \ge 0$ ja $1+x > 1$, joten neliöjuuret $\sqrt{1+x}$ ja $\sqrt{1-x}$ ovat määriteltyjä. Muokataan epäyhtälöä:

$$\begin{aligned}
&x(8\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) \le 11\sqrt{1+x}-16\sqrt{1-x}\\
\iff &(8x+16)\sqrt{1-x} \le (11-x)\sqrt{1+x} \qquad (*)\\
\iff &(8x+16)^2(1-x) \le (11-x)^2(1+x)\\
\iff &(64x^2+256x+256)(1-x) \le (x^2-22x+121)(1+x)\\
\iff &64x^2+256x+256-64x^3-256x^2-256x \le x^2-22x+121+x^3-22x^2+121x\\
\iff &-64x^3-192x^2+256 \le x^3-21x^2+99x+121\\
\iff &0 \le 65x^3+171x^2+99x-135.
\end{aligned}$$

Puolittainen neliöönkorotus kohdassa (*) säilyttää järjestyksen, koska epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, sillä erityisesti $11-x \ge 10 > 0$.

Huomataan, että $x \mapsto 65x^3+171x^2+99x-135$ on kasvava, kun $x > 0$, joten epäyhtälön ratkaisemiseksi riittää löytää vastaavan kolmannen asteen yhtälön nollakohta. Tutkitaan, onko yhtälöllä rationaalisia nollakohtia. Tunnetun säännön mukaan ne ovat muotoa $\pm k/l$, missä k on luvun $135 = 5\cdot 3^3$ ja l luvun $65 = 5\cdot 13$ tekijä. Näistä saa lukuisia yritteitä, joista osoittautuu juureksi vain $3/5$, sillä

$$\begin{aligned}
&65\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3+171\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+99\cdot\left(\frac{3}{5}\right)-135\\
=&39\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+171\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+99\cdot\left(\frac{3}{5}\right)-135\\
=&210\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+99\cdot\left(\frac{3}{5}\right)-135 = 126\cdot\left(\frac{3}{5}\right)+99\cdot\left(\frac{3}{5}\right)-135\\
=&225\cdot\left(\frac{3}{5}\right)-135 = 135-135 = 0.
\end{aligned}$$

Siis alkuperäisen epäyhtälön ratkaisu on $\frac{3}{5} \le x \le 1$.

2. *Kun x on reaaliluku, tarkoittaa $\lfloor x \rfloor$ suurinta kokonaislukua n, jolle $n \leqslant x$. Esimerkiksi $\lfloor 4{,}2 \rfloor = 4$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ja $\lfloor 8 \rfloor = 8$. Todista, että luku $\left\lfloor \left(2+\sqrt{5}\right)^{2019} \right\rfloor$ ei ole alkuluku.*

Merkitään

$$A = \left(2+\sqrt{5}\right)^{2019}, \quad B = \left(2-\sqrt{5}\right)^{2019}, \quad \text{ja} \quad C = A + B.$$

Binomikaavalla näemme, että

$$C = A + B = \sum_{\ell=0}^{2019} \binom{2019}{\ell} 2^{\ell} \left(\sqrt{5}\right)^{2019-\ell} + \sum_{\ell=0}^{2019} \binom{2019}{\ell} 2^{\ell} \left(-\sqrt{5}\right)^{2019-\ell}.$$

Kun $2019 - \ell$ on pariton, eli kun ℓ on parillinen, kumoavat vastaavat termit toisensa. Muussa tapauksessa vastaavat termit ovat yhtä suuret. Siten jäljelle jäävät vain parittomia indeksin ℓ arvoja vastaavat termit, joita jokaista esiintyy täsmälleen kaksi kappaletta, eli

$$C = 2 \sum_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant 2019, \\ 2 \nmid \ell}} \binom{2019}{\ell} 2^{\ell}\, 5^{(2019-\ell)/2}.$$

Siten C on kokonaisluku ja aivan erityisesti parillinen kokonaisluku. Mutta tiedämme myös, että

$$-1 < 2 - \sqrt{5} < 0, \quad \text{mistä seuraa myös} \quad -1 < B < 0.$$

Koska lisäksi

$$C < C + (-B) = A = C + (-B) < C + 1,$$

on oltava $\lfloor A \rfloor = C$. Siten $\lfloor A \rfloor$ on parillinen positiivinen kokonaisluku, joka on varmasti suurempi kuin esimerkiksi

$$2 \cdot \binom{2019}{2019} 2^{2019}\, 5^{(2019-2019)/2} = 2^{2020} > 2,$$

ja siten se ei voi olla alkuluku.

3. *Olkoon $ABCD$ ympyrän jännenelikulmio, jonka sivu AB on samalla ympyrän halkaisija. [*Jännenelikulmio tarkoittaa nelikulmiota, jonka kärjet sijaitsevat ympyrän kehällä.*] Janat AC ja BD leikkaavat pisteessä E ja janojen AD ja BC jatkeet pisteessä F. Jana EF leikkaa ympyrää pisteessä G ja janan EF jatke leikkaa halkaisijan AB pisteessä H. Osoita, että jos G on janan FH keskipiste, niin E on janan GH keskipiste, joten $FH \perp AB$.*

Todistus. Thaleen lauseen nojalla kulmat $\sphericalangle ADB$ ja $\sphericalangle ACB$ ovat molemmat suoria. Siis $BD \perp AF$ ja $AC \perp BF$, joten E on kolmion ABF on korkeusjanojen leikkauspiste. Koska FH kulkee pisteen E kautta, se on siis kolmas $\triangle ABF$:n korkeusjana. Tästä seuraa edelleen, että $\triangle AHF$ ja $\triangle ABD$ ovat yhdenmuotoisia, sillä molemmat ovat suorakulmaisia kolmioita ja niillä on yhteinen kulma $\sphericalangle HAF = \sphericalangle BAD$. Siis $\sphericalangle ABD = \sphericalangle HFA$. Tästä seuraa edelleen, että

$$\triangle HEB \sim \triangle HAF \Rightarrow |HE|/|HB| = |HA|/|HF| \Rightarrow |HA| \cdot |HB| = |HE| \cdot |HF.|$$

Vastaavalla tavalla saadaan pääteltyä, että $\triangle AHG \sim \triangle AGB \sim GHB$, joten $|HA|/|HG| = |HG|/|HB|$ eli $|HG|^2 = |HA| \cdot |HB|$. Yhdistämällä saadut yhtälöt saadaan

$$|HE| \cdot |HF| = |HA| \cdot |HB| = |HG|^2,$$

mistä seuraa

$$|HE|/|HG| = |HG|/|HF| = 1/2,$$

ts. E on janan GH keskipiste. $\square$

4. *Määritellään lukujono asettamalla*

$$a_n = n^n + (n-1)^{n+1},$$

kun n on positiivinen kokonaisluku. Määritä kaikki ne positiiviset kokonaislukumodulot m, joissa tämä lukujono on lopulta jaksollinen, *ts. on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut K ja s, että $a_k \equiv a_{k+s} \pmod{m}$, kun $k \geq K$ on kokonaisluku.*

Väite: Lukujono on lopulta jaksollinen kaikissa positiivisissa kokonaislukumoduloissa.

Todistus. Jaksollisuus modulo 1 on triviaali. Riittää todistaa, että jono on jaksollinen kaikissa moduloissa p^k, missä p on alkuluku ja k on positiivinen kokonaisluku, sillä väite seuraa tästä kiinalaisella jäännöslauseella.

Ensinnäkin

$$n^n + (n-1)^{n+1} \equiv (n + \ell_1 p^k)^n + (n + \ell_1 p^k - 1)^{n-1} \bmod p^k$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla ℓ_1. Lisäksi jos $\mathrm{syt}(p, n) = \mathrm{syt}(p, n-1) = 1$, niin

$$\begin{aligned} n^n + (n-1)^{n+1} &\equiv (n + \ell_1 p^k)^n + (n + \ell_1 p^k - 1)^{n-1} \bmod p^k \\ &\equiv (n + \ell_1 p^k)^{n+\ell_2\varphi(p^k)} + (n + \ell_1 p^k - 1)^{n+\ell_2\varphi(p^k)-1} \bmod p^k. \end{aligned}$$

Valitsemalla $m = \varphi(p^k)p$, huomataan, että

$$n^n + (n-1)^{n+1} \equiv (n + m\ell)^{n+m\ell} + (n + m\ell - 1)^{n+m\ell+1}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla ℓ. Mikäli toinen luvuista n tai $n-1$ on luvulla p jaollinen, on luvun riittävän korkea potenssi varmasti jaollinen luvulla p^k, jolloin tällöinkin

$$n^n + (n-1)^{n+1} \equiv (n + m\ell)^{n+m\ell} + (n + m\ell - 1)^{n+m\ell+1}.$$ $\square$

5. *Opettajalla tiedetään olevan 2^k omenaa jollakin $k \in \mathbb{N}$. Hän syö oppilaiden nähden yhden omenoista itse ja jakaa loput oppilailleen A ja B niin, ettei kumpikaan näe, kuinka monta toinen saa. A ja B eivät tunne lukua k. He ovat kuitenkin ennalta valinneet huomaamattoman tavan paljastaa yhdellä ainoalla merkillä toisilleen jotakin omenoiden lukumäärästä: Kumpikin raapii päätään oikealla, vasemmalla tai molemmilla käsillään saamiensa omenoiden lukumäärän mukaan. Opettajan ällistykseksi oppilaat tietävätkin aina, kumpi sai omenoita enemmän tai että opettaja söi ainoan omenan itse. Miten tämä on mahdollista?*

Oletetaan, että A saa m omenaa ja B n omenaa, jolloin $m+n = 2^k - 1$. Käytetään binääriselle logaritmille $\log_2$ merkintää lb. A tietää nyt, että

$$2^k \geq m+1 \Rightarrow k \geq \mathrm{lb}(m+1),$$

joten B:llä on omenoita

$$n = 2^k - 1 - m \geq 2^{\mathrm{lb}(m+1)} - 1 - m$$

kappaletta. Asetetaan siksi $f\,\mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(t) = 2^{\lceil \mathrm{lb}(t+1) \rceil} - 1 - t.$$

Havaitaan seuraavat faktat:

a) A:lla on enemmän omenoita kuin B:llä, jos ja vain jos $n = f(m)$.

b) Jokaisella $m \in \mathbb{Z}_+$ pätee $m < f(m)$ ja $f(0) = 0$.

c) $n = f(m)$ tai $m = f(n)$.

Faktasta 2 seuraa suoraan, että jokaisella $m \in \mathbb{N}$ on olemassa pienin $l \in \mathbb{N}$, jolle

$$\underbrace{(f \circ \cdots \circ f)}_{k \text{ kpl}}(m) = 0.$$

Merkitään tätä $l = h(m)$. Sopimillaan merkeillä A ja B voivat välittää tiedon toisilleen siitä, mitä ovat $h(m)$ ja $h(n)$ modulo 3: Pään raapiminen oikealla kädellä on 0, vasemmalla 1 ja molemmilla 2. Jos $k > 0$, niin $2^k - 1$ on pariton, joten $m \neq n$. Tällöin $m < n$, jos ja vain jos $m = f(n)$, jos ja vain jos $h(n) \equiv h(m) + 1 \pmod 3$; vastaavasti $m > n$, jos ja vain jos $h(m) \equiv h(n) + 1 \pmod 3$. Jos taas $k = 0$ (eli opettaja syö ainoan omenansa itse), niin $h(m) = h(n) = 0$. Kaikissa näissä tapauksissa oppilaat pystyvät välittämään tarpeellisen määrän tietoa toisilleen.

Luonnollisempia signaaleja olisivat tietenkin käsimerkit kivi, sakset ja paperi, mutta niitä ei voi pitää kovin huomaamattomina.