Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

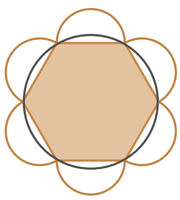
9. 10. 2019

Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Pihlan työviikko lyheni p % samalla, kun hänen tuntipalkkansa nousi p %. Tällöin Pihlan viikkopalkka aleni 4 %. Voidaan päätellä, että

a) $p < 15$ b) $p \geq 15$ c) $p = 20$ d) $p = 10$

2. Ympyrän Γ sisällä on säännöllinen 6-kulmio ja 6-kulmion sivuille on piirretty puoliympyrän kaaret kuvan mukaisesti.



Näiden puoliympyröiden pinta-alojen summan suhde ympyrän Γ pinta-alaan on

a) $2/3$ b) vähemmän kuin 0,8
c) $3/4$ d) $4/5$

3. Etsittävänä on murtoluku q, joka on yhtä etäällä jaksollisista desimaaliluvuista $0{,}0246246\ldots$ ja $0{,}0328328\ldots$ (molemmissa tapauksissa jaksot ovat kolmenumeroisia).

a) $q = \dfrac{612}{15000}$ b) $q = \dfrac{120}{7290}$
c) $q = \dfrac{574}{19980}$ d) Tällaista ei ole olemassa.

4. Tasakylkisen puolisuunnikkaan sivujen pituudet ovat $a + 3$, $a - 3$, $a + 3$ ja $a + 7$. Puolisuunnikkaan lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vasten. Mitä voidaan sanoa pituudesta a?

a) $a < 8$ b) $a = 10$ c) $a = 7$ d) a on kokonainen

5. Monikulmion *lävistäjällä* tarkoitetaan kahden kärjen välistä yhdysjanaa, joka ei ole sivu. Monikulmion kulmien ei sallita olevan oikokulmia. *Kuperalla monikulmiolla* tarkoitetaan monikulmiota, joka sisältää lävistäjänsä. Mitkä monikulmioita koskevat väittämät ovat tosia?

a) On olemassa viisikulmio, jolla on kaksi yhdensuuntaista lävistäjää.
b) Säännöllisen monikulmion lävistäjät leikkaavat aina toisiaan.
c) Jos kuperan n-kulmion kaksi lävistäjää on yhdensuuntaiset, niin $n \geq 6$.
d) Monikulmiolla voi olla kaksi lävistäjää, jotka ovat saman suoran erillisiä osia.

6. Mitä voidaan sanoa kokonaisluvusta 7^{7^7}, kun se kirjoitetaan tavanomaisella tavalla kymmenjärjestelmässä?

a) Siinä on vähemmän kuin miljoona numeroa.
b) Se päättyy numeroon 3.
c) Sen numeroiden summa ei ole kolmella jaollinen.
d) Se ei ole alkuluku.

7. Aritmeettiselle jonolle a_1, a_2, $\ldots$ pätee $\dfrac{d}{a_1} = \dfrac{a_1 + d}{d}$ ja $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$, missä $d = a_2 - a_1$. Määritä a_1 ja d, kun oletetaan, että a_1 ja d ovat samanmerkkisiä.

8. Maija pelaa seuraavaa yksinpeliä äärettömällä ruutulaudalla: Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Maijalla on pelinappula, joka on aluksi origossa eli ruudussa $(0, 0)$. Nappulaa saa yhdellä siirrolla siirtää $k - 1$ ruutua vaakatasossa, k ruutua pystysuuntaan tai $k + 1$ ruutua vinottain. Nappulan saa siis siirtää siirrolla ruudusta (x, y) johonkin seuraavista ruuduista:

– ruutuun $(x - (k - 1), y)$ tai ruutuun $(x + (k - 1), y)$,
– ruutuun $(x, y - k)$ tai ruutuun $(x, y + k)$,
– tahi ruutuun $(x-(k+1), y-(k+1))$, ruutuun $(x-(k+1), y+(k+1))$, ruutuun $(x+(k + 1), y - (k + 1))$ tai ruutuun $(x + (k + 1), y + (k + 1))$.

Maija arpoo kokonaislukupisteen eli tavoiteruudun (a, b). Maija voittaa, mikäli hän löytää sarjan siirtoja, joilla hän pääsee ruudusta $(0, 0)$ ruutuun (a, b). Voittaako Maija aina riippumatta kokonaisluvuista a ja b, jos hän pelaa oikealla tavalla, kun a) $k = 6$, b) $k = 2019$?

9. 10.

Perussarjan monivalinnan vastauslomake

2019

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. ***Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.*** *Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi: ____________________

Koulu: ____________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

9. 10. 2019

Tehtäviä on kahdella sivulla; kolme ensimmäistä tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Ympyräpohjaisen suoran kartion pohjan halkaisija on 2 ja myös etäisyys kärjestä pohjan reunaan on 2. Neliöpohjaisen suoran pyramidin pohjan sivu on 2 ja huipun etäisyys pohjaneliön kärjestä 2. Mitä voit sanoa tilavuuksista?

a) Tilavuudet ovat kokonaislukuja.
b) Tilavuuksia ei voi laskea annetuilla tiedoilla.
c) Kappaleiden tilavuudet ovat samat.
d) Ympyräpohjainen kartio on suurempi.

2. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät kokonaiskertoimiselle polynomille $P(x) = x^4 + x^2 + 1$?

a) Se on jaoton, ts. sitä ei voi esittää alempiasteisten kokonaiskertoimisten polynomien tulona.
b) Sillä ei ole reaalisia nollakohtia.
c) Sen kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen.
d) Yhtälöllä $P(x) = 7$ on rationaalinen ratkaisu.

3. Funktiolle $f\colon\ ]0,\infty[\ \longrightarrow\ ]1,\infty[$ pätee

$$f(x) = e^{f(x)-x-1}$$

kaikilla $x \in\ ]0,\infty[$. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät varmasti paikkaansa?

a) Jos $x, y \in\ ]0,\infty[$ ja $x \neq y$, niin $f(x) \neq f(y)$.
b) Jos $x \in\ ]0,\infty[$, niin $f(x) < x$.
c) On olemassa $x \in\ ]0,\infty[$, jolle $f(x) = x + 1$.
d) Jos $x \in\ ]0,\infty[$, niin $f(x) > x$.

4. Aritmeettiselle jonolle $a_1,\ a_2,\ \ldots$ pätee $\dfrac{d}{a_1} = \dfrac{a_1 + d}{d}$ ja $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$, missä $d = a_2 - a_1$. Määritä a_1 ja d, kun oletetaan, että a_1 ja d ovat samanmerkkisiä.

5. Maija pelaa seuraavaa yksinpeliä äärettömällä ruutulaudalla: Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Maijalla on pelinappula, joka on aluksi origossa eli ruudussa $(0, 0)$. Nappulaa saa yhdellä siirrolla siirtää $k - 1$ ruutua vaakatasoon, k ruutua pystysuuntaan tai $k + 1$ ruutua vinottain. Nappulan saa siis siirtää siirrolla ruudusta (x, y) johonkin seuraavista ruuduista:

- ruutuun $(x - (k - 1), y)$ tai ruutuun $(x + (k - 1), y)$,
- ruutuun $(x, y - k)$ tai ruutuun $(x, y + k)$,
- tahi ruutuun $(x-(k+1), y-(k+1))$, ruutuun $(x-(k+1), y+(k+1))$, ruutuun $(x+(k + 1), y - (k + 1))$ tai ruutuun $(x + (k + 1), y + (k + 1))$.

Maija arpoo kokonaislukupisteen eli tavoiteruudun (a, b). Maija voittaa, mikäli hän löytää sarjan siirtoja, joilla hän pääsee ruudusta $(0, 0)$ ruutuun (a, b). Millä kokonaisluvun k arvoilla Maija voittaa aina riippumatta kokonaisluvuista a ja b, jos hän pelaa oikealla tavalla?

6. Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$x^4y^2 + 2x = 2019$$

eli etsi kaikki kokonaislukuparit (x, y), jotka toteuttavat yo. yhtälön.

9.10.

Välisarjan monivalinnan vastauslomake

2019

Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4–6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4–6 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. ***Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.*** *Kirjoita myös tehtävien 4–6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi: ____

Koulu: ____

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

9. 10. Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja 2019

1. Olkoon $ABCDE$ säännöllinen viisikulmio, jolle tähden $ACEBD$ ala on yksi. Määritä pinta-ala nelikulmiolle $APQD$, kun P on janojen AC ja BE leikkaupiste sekä Q puolestaan janojen BD ja CE leikkauspiste.

2. Maija pelaa seuraavaa yksinpeliä äärettömällä ruutulaudalla: Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Maijalla on pelinappula, joka on aluksi origossa eli ruudussa $(0, 0)$. Nappulaa saa yhdellä siirrolla siirtää $k - 1$ ruutua vaakatasoon, k ruutua pystysuuntaan tai $k + 1$ ruutua vinottain. Nappulan saa siis siirtää siirrolla ruudusta (x, y) johonkin seuraavista ruuduista:

- ruutuun $(x - (k - 1), y)$ tai ruutuun $(x + (k - 1), y)$,
- ruutuun $(x, y - k)$ tai ruutuun $(x, y + k)$,
- tahi ruutuun $(x-(k+1), y-(k+1))$, ruutuun $(x-(k+1), y+(k+1))$, ruutuun $(x+(k + 1), y - (k + 1))$ tai ruutuun $(x + (k + 1), y + (k + 1))$.

Maija arpoo kokonaislukupisteen eli tavoiteruudun (a, b). Maija voittaa, mikäli hän löytää sarjan siirtoja, joilla hän pääsee ruudusta $(0, 0)$ ruutuun (a, b). Millä kokonaisluvun k arvoilla Maija voittaa aina riippumatta kokonaisluvuista a ja b, jos hän pelaa oikealla tavalla?

3. Ratkaise Diofantoksen yhtälö
$$x^4y^2 + 2x = 2019$$
eli etsi kaikki kokonaislukuparit (x, y), jotka toteuttavat yo. yhtälön.

4. Tarkastellaan Fibonaccin lukujen jonoa F_1, F_2, ..., joka määritellään asettamalla $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku k, jolla on se ominaisuus, että välillä $]F_n, F_{n+1}[$ on kuutioluku jokaisella kokonaisluvulla $n \geqslant k$, tai osoita, että tällaista lukua k ei ole olemassa. Positiivisia kuutiolukuja ovat $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ ja niin edelleen.

Työaikaa on **120 minuuttia**.
Laskimet ja taulukkokirjat eivät ole sallittuja.
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse kuhunkin koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.