# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

9. 10.

2019

## Perussarjan monivalintatehtävät

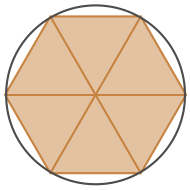
| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| 2. | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| 3. | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| 4. | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| 5. | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| 6. | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

**P1.** Pihlan työviikon pituus oli aluksi $t$ ja tuntipalkka $s$, joten viikkopalkka oli $ts$. Muutosten jälkeen työviikon pituudeksi tuli $t\left(1-\frac{p}{100}\right)$ ja tuntipalkaksi $s\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Pihlan viikkopalkalle saadaan siis yhtälö

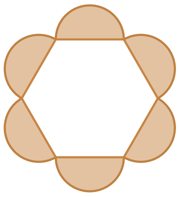
$$
\begin{aligned}
& t\left(1-\frac{p}{100}\right) s\left(1+\frac{p}{100}\right)=ts\left(1-\frac{4}{100}\right) \\
\iff & \left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=0,96 \\
\iff & 1-\frac{p^2}{100^2}=0,96 \iff 10000-p^2=9600 \iff p^2=400 \iff p=20,
\end{aligned}
$$

sillä $p>0$. Siis väitteet b ja c ovat oikein, a ja d sen sijaan väärin.

**P2.** Säännöllinen kuusikulmio jakautuu tunnetusti kuvion mukaisesti kuudeksi tasasivuiseksi kolmioksi,



joten puoliympyröiden yhteinen halkaisijan pituus on ympyrän $\Gamma$ säde $r$ ja puoliympyröiden yhteinen säde on $r/2$.



Puoliympyröiden alojen summa on $6 \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi r^2$ ja kysytty suhde on siis $3/4 < 0{,}8$. Siis kohdat b ja c ovat oikein, a ja d väärin.

**P3.** Merkitään $a = 0{,}0246246\ldots$ ja $b = 0{,}0328328\ldots$, jolloin

$$\begin{cases} 10a = \phantom{246}0{,}246246\ldots \\ 10\,000a = 246{,}246246\ldots \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 10b = \phantom{328}0{,}328328\ldots \\ 10\,000b = 328{,}328328\ldots, \end{cases}$$

mistä laskemalla erotuksia saadaan

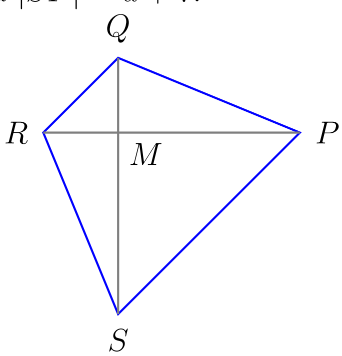
$$9\,990a = 246 \text{ ja } 9\,990b = 328.$$

Siis $a = 246/9990$ ja $b = 328/9990$. Etsittävä luku on näiden keskiarvo (joka voidaan selvästi kirjoittaa murtolukuna, joten kohta d on väärin)

$$q = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{246+328}{9\,990} = \frac{574}{19\,980}.$$

Tämä on kohdan c vastaus; tarkastetaan vielä, että kohdissa a ja b on eri lukuja. Koska $612 > 574$ ja $15\,000 < 19\,980$, niin $612/15\,000 > 574/19\,980$. Koska $574 > 3 \cdot 120$ ja $19980 < 3 \cdot 7290$, niin $574/19\,980 > 120/7290$. Siis vain kohta c on oikein, muut ovat väärin.

**P4.** Tasakylkisen puolisuunnikkaan $PQRS$ sivujen pituudet ovat oletuksen mukaan $|PQ| = |RS| = a+3$, $|QR| = a-3$ ja $|SP| = a+7$.



Merkitään lävistäjien leikkauspistettä symbolilla $M$. Tarkastellaan lävistäjien osia $x = |MP|$, $y = |MQ|$, $u = |MR|$ ja $t = |MS|$. Koska lävistäjät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, saadaan Pythagoraan lausetta toistuvasti käyttämällä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |MP|^2 + |MQ|^2 = |PQ|^2 = (a+3)^2 \\ y^2 + u^2 = |MQ|^2 + |MR|^2 = |QR|^2 = (a-3)^2 \\ u^2 + t^2 = |MR|^2 + |MS|^2 = |RS|^2 = (a+3)^2 \\ t^2 + x^2 = |MS|^2 + |MP|^2 = |SP|^2 = (a+7)^2. \end{cases}$$

Kahdesta ensimmäisestä ja toisaalta kahdesta seuraavasta yhtälöstä saadaan edelleen

$$\begin{cases} x^2 - u^2 = (x^2 + y^2) - (y^2 + u^2) = (a+3)^2 - (a-3)^2 \\ x^2 - u^2 = (t^2 + x^2) - (u^2 + t^2) = (a+7)^2 - (a+3)^2. \end{cases}$$

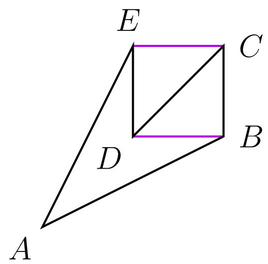
Näitä tietoja yhdistelemällä saadaan $a$:lle yhtälö

$$\begin{aligned} &(a+7)^2 - (a+3)^2 = x^2 - u^2 = (a+3)^2 - (a-3)^2 \\ \Rightarrow\ &(a+7-(a+3))(a+7+(a+3)) = ((a+3)-(a-3))(a+3+(a-3)) \\ \iff\ &4 \cdot (2a+10) = 6 \cdot 2a \iff 8a + 40 = 12a \iff 40 = 4a \iff a = 10. \end{aligned}$$

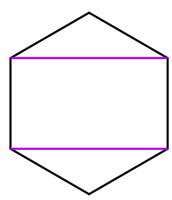
Ratkaisu $a = 10$ on kokonainen (kohdat b ja d oikein). Kohdat a ja c ovat sen sijaan väärin.

**Huomautus:** Tehtävän voi siis ratkaista olettamatta, että nelikulmio $PQRS$ on puolisuunnikas. Kaikkien ratkaisussa esitettyjen tuntemattomien ratkaisemiseen sen sijaan tarvittaisiin tätä oletusta, ja käyttämällä kolmioiden $PMS$ ja $QMR$ yhdenmuotoisuutta saataisiin $x = t = 17/\sqrt{2}$ ja $y = u = 7/\sqrt{2}$.

**P5.** a) Tällainen viisikulmio on todellakin olemassa. Lähdetään liikkeelle yhdensuuntaisista janoista, esimerkiksi $BD$ ja $CE$, missä $B = (2,1)$, $C = (2,2)$, $D = (1,1)$ ja $E = (1,2)$. Asetetaan $A$ sellaiseen paikkaan, että muodostuu viisikulmio $ABCDE$, vaikkapa origoon.

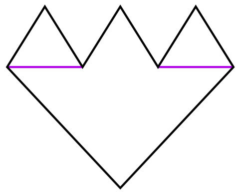



b) Säännöllisen monikulmion lävistäjät eivät välttämättä leikkaa toisiaan, kun sivuja on vähintään kuusi.



c) Kolmiolla ei ole lävistäjiä. Neli- ja viisikulmioiden tapauksessa lävistäjän jommallekummalle puolelle jää vain yksi kärki. Sen tähden kahdella lävistäjällä on pakko olla joko yhteinen kärki tai niiden on leikattava, joten ne eivät voi yhdensuuntaisia.

d) Monikulmion lävistäjät voivat olla saman suoran erillisiä osia, kuten seuraava kuva osoittaa.



Kohdat a, c ja d ovat siis tosia, b valetta.

**P6.** Merkitään $n = 7^{7^7}$. Tällöin

$$\lg(n) = 7^7 \lg 7 < 7^7 = (7^2)^3 \cdot 7 < 50^3 \cdot 7 = 875\,000 < 10^6,$$

joten luvussa $n$ on vähemmän kuin miljoona numeroa.

Huomataan, että $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}$, joten sen, mihin numero $7^k$ päättyy, kun $n \in \mathbb{N}$, ratkaisee eksponentin arvo modulo 4. Saadaan

$$7^7 \equiv (-1)^7 = -1 \equiv 3 \pmod{4},$$

joten

$$n \equiv 7^3 = 343 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Siis luku $n$ päättyy numeroon 3.

Kolmella jaollisuuden säännön mukaan $n$ on kolmella jaollinen, jos ja vain jos sen numeroiden summa on kolmella jaollinen. Toisaalta selvästi $n$ ei ole kolmella jaollinen, koska sen ainoa alkutekijä on 7. Tästä samasta syystä $n$ ei tietenkään myöskään ole alkuluku. Siis kaikki vaihtoehdot ovat oikein.

## Perussarjan perinteiset tehtävät

**P7.** Ratkaisemalla $d$ yhtälöstä

$$\frac{d}{a_1} = \frac{a_1 + d}{d} \iff d^2 = (a_1)^2 + a_1 d \iff d^2 - a_1 d - (a_1)^2 = 0$$

saadaan

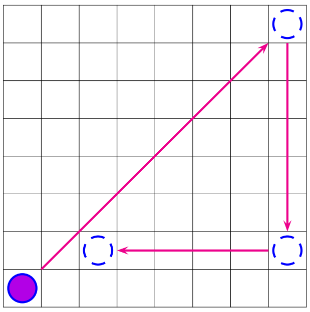
$$d = \frac{1}{2}a_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_1)^2 + (a_1)^2} = \frac{1}{2}a_1 \pm \frac{|a_1|}{2}\sqrt{5}.$$

Koska $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5} > 0$ sekä $a_1$ ja $d$ ovat samanmerkkisiä, niin ne ovat välttämättä positiivisia. Siis $d = a_1(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$. Sijoittamalla tämä tieto yhtälöön $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$ saadaan

$$2020 + 2018\sqrt{5} = a_{2019} = a_1 + 2018d = a_1 + 2018a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{a_1}{2}(2020 + 2018\sqrt{5}),$$

joten $a_1 = 2$ ja $d = 1 + \sqrt{5}$.

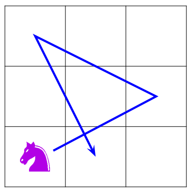
**P8.** Tämä on tehtävän **V5** erikoistapaus. Kohdassa a vastaus on siis kyllä, kohdassa b ei. Kohtaan a on myös yleistä ratkaisua suorempia menetelmiä.



Origosta nappulan voi siirtää vinoon ruutuun $(7,7)$, josta edelleen pystysuoraan ruutuun $(7,1)$ ja vaakasuoraan ruutuun $(2,1)$. Kaikkiaan kolmella nappulan siirrolla syntyy siis ratsun siirto. Peilisymmetrian vuoksi kaikki siirrot origosta ruutuun $(\pm 2, \pm 1)$ pystyy tekemään kolmella nappulan siirrolla. Reittiä

$$(0,0) \xrightarrow{\text{3 siirtoa}} (2,1) \xrightarrow{\text{3 siirtoa}} (4,2) \to (-1,2)$$

pitkin pääsee origosta myös ruutuun $(-1,2)$, ja peilisymmetrian vuoksi seitsemällä siirrolla kaikkiin ruutuihin $(\pm 1, \pm 2)$. Siis korkeintaan seitsemällä siirrolla pystyy synnyttämään kaikki ratsun siirrot eli siirtymään origosta ruutuhin $(\pm 2, \pm 1)$ ja $(\pm 1, \pm 2)$. Tunnetusti shakkiratsulla pääsee äärettömän ruudukon kaikkiin ruutuihin. Symmetrian vuoksi riittää nimittäin osoittaa, että ruutu $(1,0)$ on tavoitettavissa. Koska ratsu pääsee siihen kolmessa siirrossa pitkin reittiä $(0,0) \to (2,1) \to (0,2) \to (1,0)$, niin tehtävän nappulalla pääsee ruutuun $(1,0)$ origosta $3+3+7=13$ siirrossa.



# Välisarjan monivalintatehtävät

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| 2. | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| 3. | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |

**V1.** Ympyräpohjaisen kartion pohjan säde on 1, kartion korkeus $\sqrt{3}$, joten tilavuus on $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$. Neliöpohjaisen kartion pohjan ala on 4 ja korkeus $\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$. Tilavuus on siis $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Tilavuudet voidaan siis laskea annetuilla tiedoilla, ne eivät ole kokonaislukuja, eivätkä ne ole samoja. Siis kohdat a, b ja c ovat väärin.

Verrataan nyt tilavuuksien suuruutta. Suuruusjärjestys säilyy, vaikka poistettaisiin nimittäjät ja korotettaisiin neliöön. Verrataan siis lukuja $3\pi^2$ ja $16 \cdot 2 = 32$. Koska $\pi < 3{,}2$ ja $3\pi < 10$, on pyramidin tilavuus suurempi. Siis kohta d on myös väärin.

**V2.** Polynomille $P(x)$ saa tekijöihinjaon, nimittäin $P(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee $P(x) \geq 1$, joten nollakohtia ei ole. Polynomin kuvaaja on symmetrinen $y$-akselin suhteen, sillä

$$P(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = P(x).$$

Viimeisen kohdan yhtälön pystyy ratkaisemaan:

$$P(x) = 7 \iff x^4 + x^2 - 6 = 0 \iff (x^2-2)(x^2+3) = 0 \iff x^2 = 2 \vee x^2 = -3,$$

mutta edellisellä toisen asteen yhtälöllä ei ole rationaalisia eikä jälkimmäisellä edes reaalisia ratkaisuja. Siis kohdat b ja c ovat oikein ja muut väärin.

**V3.** a) Jos $x, y \in \,]0, \infty[$ ja $f(x) = f(y)$, niin

$$e^{f(x)-x-1} = f(x) = f(y) = e^{f(y)-y-1} = e^{f(x)-y-1},$$

eli $f(x) - x - 1 = f(x) - y - 1$, eli $x = y$. Väite a siis pitää aina paikkaansa.

b) Jos väite b pitäisi paikkaansa, niin erityisesti olisi $f(1) < 1$. Mutta on oltava $f(1) > 1$. Siten väite b ei voi pitää paikkaansa.

c) Jos olisi olemassa $x \in \,]0, \infty[$, jolle olisi $f(x) = x + 1$, niin silloin olisi

$$x + 1 = e^{x+1-x-1} = 1,$$

eli olisi $x = 0$. Siten väite c ei pidä paikkaansa.

d) Olkoon $x \in \,]0, \infty[$. Koska

$$e^{f(x)-x-1} = f(x) > 1,$$

on

$$e^{f(x)} > e^{x+1},$$

eli $f(x) > x + 1 > x$. Siten väite d pitää varmasti paikkaansa.

## Välisarjan perinteiset tehtävät

**V4.** Sama kuin **P7.**

**V5.** Jos $k - 1$ on parillinen, niin huomataan, että pelinappulan $x$-koordinaatti pysyy aina parillisena. Jos siis tavoiteruudun $x$-koordinaatti on pariton, kuten ruudulla $(1, 0)$, niin Maija ei koskaan voi saavuttaa sitä. Siis Maija ei voi aina voittaa, jos $k$ on pariton.

Osoitetaan nyt, että jos $k$ on parillinen, niin Maija pystyy tavoittamaan minkä tahansa ruudun. Tällöin siirtämällä $k$ kertaa oikealle ja $k-1$ kertaa ylös Maija pääsee ruutuun $(k^2-k, k^2-k)$. Koska

$$\text{syt}(k^2-k, k+1) = \text{syt}(k(k-1), k+1) = \text{syt}(k-1, k+1) = \text{syt}(2, k+1) = 1,$$

niin yhdistämällä tätä siirtosarjaa diagonaalisiirtoihin ($k+1$ diagonaalilla) päästään ruutuun $(1,1)$. Vastaavasti päästään ruutuun $(1,-1)$. Nämä yhdistämällä päästään ruutuun $(2,0)$ ja vastaavasti ruutuun $(0,2)$. Koska $k-1$ ja $k+1$ ovat parittomia, päästään näiden siirtojen avulla ruutuihin $(\pm1,0)$ ja $(0,\pm1)$. Näiden siirtojen avulla taas päästään mihin tahansa ruutuun.

**V6.** Yhtälöstä seuraa, että $x^4y^2 = 2019-2x = 2(1009-x)+1$ on pariton, joten sekä $x$ että $y$ on pariton. Erityisesti $y^2 \geq 1$. Kun $|x| \geq 7$, niin saadaan

$$x^4y^2+2x \geq x^4+2x \geq |x|^4-2|x| = |x|(|x|^3-2) \geq 7(7^3-2) = 7\cdot341 \geq 7\cdot300 = 2100 > 2019,$$

joten yhtälöllä ei tässä tapauksessa voi olla ratkaisua. Siis $|x| < 7$ ja luvun $x$ parittomuuden vuoksi $|x| \leq 5$. Eri tapaukset on siten helppoa käydä läpi.

Kun $|x| = 1$, niin $x^4y^2+2x = 1\cdot y^2+2x = y^2+2x$ ja yhtälö supistuu siis joko muotoon $y^2+2 = 2019$ eli $y^2 = 2017$ tai $y^2-2 = 2019$ eli $y^2 = 2021$. Luvut 2017 ja 2021 eivät kuitenkaan ole kokonaisluvun neliöitä, sillä $44^2 = 1936$ ja $45^2 = 2025$.

Kun $|x| = 3$, niin $x^4 = 3^4 = 81$ ja

$$x^4y^2+2x = 2019 \iff 81y^2 = 2019-2x.$$

Jos $x = 3$, niin $2019-2x = 2013$ ei ole luvulla 81 jaollinen, mutta jos $x = -3$, saadaan edelleen $2019-2x = 2025 = 81\cdot25 = 81\cdot5^2$. Siis $x=-3$, $y=\pm5$ on yhtälön ratkaisu.

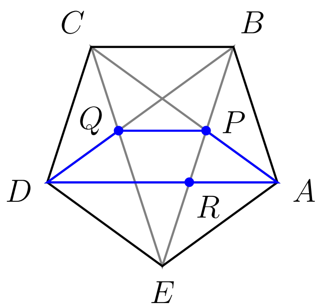
Kun $|x| = 5$, niin $x^4 = 5^4 = 625$. Jos $x = 5$, niin yhtälö supistuu muotoon $625y^2 = 2009$, jos taas $x = -5$, niin muotoon $625y^2 = 2029$. Kuitenkaan kumpikaan luvuista 2009 ja 2029 ei ole luvulla 625 jaollinen.

**Vastaus:** Yhtälön ratkaisu on

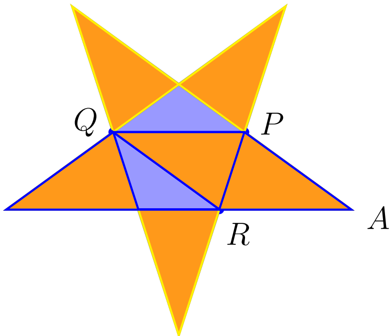
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = \pm5. \end{cases}$$

## Avoin sarja

**A1.** Olkoon $R$ lävistäjien $AD$ ja $BE$ leikkauspiste.



Tarkastellaan seuraavaa tapaa paloitella tarkasteltavat alat.




Väitetään, että kuviossa jokaisella oranssiksi väritetyllä kolmiolla on sama ala $a$ ja molemmilla vaaleansinisillä kolmioilla on sama ala $b$. Vaaleansinisten kolmioiden tapaus on helppo, sillä tähden sisälle syntyvä pieni viisikulmio on myös säännöllinen ja molemmat kolmiot ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden kanta on säännöllisen viisikulmion lävistäjä ja kyljet tämän viisikulmion sivuja. Siten ne ovat yhteneviä ja niillä on sama ala. Oransseista kolmioista viisi on tähden sakaroita, kuten kolmio $PRA$, ja ne ovat säännöllisen viisikulmion säännöllisyyden vuoksi yhteneviä. Perustellaan, miksi $PRA$ on yhtenevä myös kuudennen kolmion $PQR$ kanssa. Säännöllisen viisikulmion lävistäjä on luonnollisesti yhdensuuntainen sen sivun kanssa, jonka kanssa sillä ei ole yhteistä kärkeä. Siis $PQ \parallel AD$, joten myös $PQ \parallel AR$. Samalla tavoin saadaan perusteltua $AP \parallel QR$, joten $APQR$ on suunnikas (itse asiassa neljäkäs). Tästä seuraa suoraan $\triangle PRA \cong \triangle RPQ$.

Edellisen tarkastelun perusteella nelikulmion $APQD$, joka koostuu kolmesta oranssista ja yhdestä vaaleansinisestä kolmiosta, ala on $3a + b$. Tähden ala on vastaavasti $6a + 2b$. Koska $6a + 2b = 1$, niin $3a + b = \frac{1}{2}(6a + 2b) = \frac{1}{2}$.

Vastaus: Nelikulmion $APQD$ pinta-ala on $\frac{1}{2}$.

**A2.** Sama kuin **V5.**

**A3.** Sama kuin **V6.**

**A4.** Osoitamme, että tavoiteltu luku on $k = 10$. Koska toisaalta $F_9 = 34$ ja $F_{10} = 55$, ja toisaalta $3^3 = 27 < 34$ ja $4^3 = 64 > 55$, on oltava $k \geqslant 10$, jos halutunlainen luku $k$ on olemassa. Koska lisäksi toisaalta

$$F_{10} = 55, \qquad F_{11} = 89, \qquad F_{12} = 144, \qquad F_{13} = 233, \qquad F_{14} = 377, \qquad \text{ja} \qquad F_{15} = 610,$$

ja toisaalta

$$4^3 = 64, \qquad 5^3 = 125, \qquad 6^3 = 216, \qquad 7^3 = 343, \qquad \text{ja} \qquad 8^3 = 512,$$

on

$$F_{10} < 4^3 < F_{11} < 5^3 < F_{12} < 6^3 < F_{13} < 7^3 < F_{14} < 8^3 < F_{15}.$$

Riittää siis enää osoittaa, että jokaisella kokonaisluvulla $n \geqslant 15$ lukujen $F_{n+1}$ ja $F_n$ välistä löytyy kuutioluku. Tämä puolestaan seuraa välittömästi, jos $\sqrt[3]{F_{n+1}} - \sqrt[3]{F_n} > 1$, sillä tällöinhän on olemassa kokonaisluku $\ell \in \left]\sqrt[3]{F_n}, \sqrt[3]{F_{n+1}}\right[$, jolloin $F_n < \ell^3 < F_{n+1}$. Tämän puolestaan voimme osoittaa arvioimalla

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{F_{n+1}} - \sqrt[3]{F_n} &= \frac{F_{n+1} - F_n}{\sqrt[3]{F_{n+1}^2} + \sqrt[3]{F_{n+1}\,F_n} + \sqrt[3]{F_n^2}} = \frac{F_{n-1}}{\sqrt[3]{F_{n+1}^2} + \sqrt[3]{F_{n+1}\,F_n} + \sqrt[3]{F_n^2}} \\
&> \frac{F_{n-1}}{3\sqrt[3]{F_{n+1}^2}} = \frac{F_{n-1}}{3\sqrt[3]{(F_n + F_{n-1})^2}} = \frac{F_{n-1}}{3\sqrt[3]{(2\,F_{n-1} + F_{n-2})^2}} \\
&> \frac{F_{n-1}}{3\sqrt[3]{(3\,F_{n-1})^2}} = \frac{\sqrt[3]{F_{n-1}}}{3\sqrt[3]{9}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{F_{14}}{3^3 \cdot 9}} = \sqrt[3]{\frac{377}{243}} > 1.
\end{aligned}$$