Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailun ratkaisut

19. 1. 2018

1. *Eevalla ja Martilla on kokonaislukumäärä euroja. Martti sanoi Eevalle: "Jos annat minulle kolme euroa, niin minulla on n-kertainen määrä rahaa sinuun verrattuna". Eeva puolestaan sanoi Martille: "Jos sinä annat minulle n euroa, niin minulla on kolminkertainen määrä rahaa sinuun verrattuna". Oletetaan, että molemmat väitteet pitävät paikkansa. Mitä arvoja positiivinen kokonaisluku n voi saada?*

Ratkaisu: Olkoon x Martin rahamäärä ja y Eevan rahamäärä. Tällöin

$$x + 3 = n(y - 3)$$
$$y + n = 3(x - n).$$

Kun ylemmästä yhtälöstä ratkaistaan $x = n(y-3)-3$ ja sijoitetaan alempaan, saadaan

$$y + n = 3(n(y-3) - 3 - n) = 3ny - 12n9 \iff y + 9 = 3ny - 13n = n(3y - 13).$$

Koska $y+9 > 0$ ja $n > 0$, niin siis myös $3y-13 > 0$. Lisäksi huomataan, että $3y-13 \mid y+9$ eli $3y-13$ jakaa luvun $y+9$. Tästä seuraa $3y-13 \mid 3(y+9)-(3y-13) = 27+13 = 40$, joten koska $3y-13 > 0$, saadaan

$$3y - 13 \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}.$$

Toisaalta tietenkin $3y - 13 \equiv -13 \equiv 2 \pmod 3$, joten jäljelle jäävät vain vaihtoehdot $3y-13 = 2$, $3y-13 = 5$, $3y-13 = 8$ tai $3y-13 = 20$, mistä ratkaisemalla saadaan $y = 5$, $y = 6$, $y = 7$ tai $y = 11$. Vastaavat luvun n arvot saadaan yhtälöstä $n = (y+9)/(3y-13)$: $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ja $n = 7$.

Vastaus: $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ja $n = 7$.

2. *Kolmion ABC sivut ovat $a = |BC|$, $b = |CA|$ ja $c = |AB|$. Pisteet D, E ja F ovat sellaiset sivujen BC, CA ja AB pisteet, että AD, BE ja CF ovat kolmion ABC kulmien puolittajia. Määritä janojen AD, BE ja CF pituudet a:n, b:n ja c:n avulla.*

Ratkaisu: Lasketaan $BE = x$. Tunnetusti kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Siis

$$|CE| = \frac{ab}{a+c}.$$

Kosinilauseesta saadaan

$$x^2 = a^2 + \frac{(ab)^2}{(a+c)^2} - 2\frac{a^2b}{a+c}\cos(\sphericalangle BCA).$$

Mutta kosinilauseen mukaan on myös $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\sphericalangle BCA)$. Siis

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + \frac{(ab)^2}{(a+c)^2} - 2\frac{a}{a+c}(c^2 - a^2 - b^2) \\ &= \frac{a^2(a+c)^2 + a^2b^2 + a(a+c)(c^2 - a^2 - b^2)}{(a+c)^2} \\ &= \frac{a^3c + 2a^2c^2 + ac^3 - ab^2c}{(a+c)^2} = \frac{ac}{(a+c)^2}\big((a+c)^2 - b^2\big). \end{aligned}$$

Siis

$$x = |BE| = \frac{\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)}.$$

Symmetrian perusteella

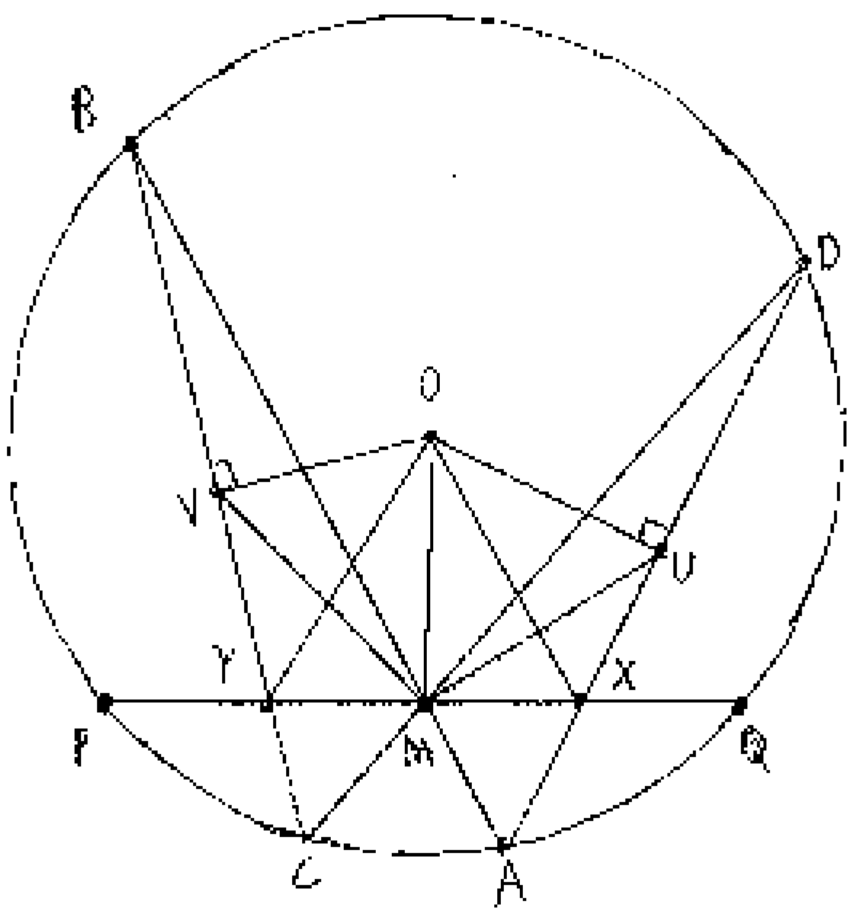
$$|AD| = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}$$

ja

$$|CF| = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}. \quad \square$$

3. *Ympyrän jänteet AB ja CD leikkaavat ympyrän sisällä pisteessä M, joka on lisäksi jänteen PQ keskipiste. Pisteet X ja Y ovat janojen AD ja PQ sekä BC ja PQ leikkauspisteet, tässä järjestyksessä. Osoita, että M on janan XY keskipiste.*

Ratkaisu: Määritetään pisteet O, U ja V kuvan esittämällä tavalla.



$\sphericalangle CMB = \sphericalangle DMA$ ja $\sphericalangle ADM = \sphericalangle MBC$, joten kolmiot BCM ja ADM ovat yhdenmuotoiset. Edelleen $\sphericalangle MVC = \sphericalangle AUM$, koska yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinjanojen (tässä tapauksessa keskijanan ja sivun) välinen kulma on sama. Koska $\sphericalangle OVY = \sphericalangle YMO = 90°$, niin $OVYM$ on jännenelikulmio. Lisäksi $\sphericalangle OMX = \sphericalangle XUO = 90°$, joten $OMXU$ on myös jännenelikulmio. Näistä seuraa

$$\sphericalangle MOY = \sphericalangle MVY = \sphericalangle MVC = \sphericalangle AUM = \sphericalangle XUM = \sphericalangle XOM,$$

joten OYX on tasakylkinen kolmio ja OM sen korkeusjana. Siis $|YM| = |MX|$ eli M on janan XY keskipiste. $\square$

4. *Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ niin, että $f(1) = 1$ ja $f(n)$ on luvun n suurin alkutekijä, kun $n > 1$. Aino ja Väinö pelaavat peliä, jossa molemmilla on kasa kiviä. Jokaisella siirtovuorolla vuorossa oleva pelaaja, jolla on m kiveä kasassaan, saa poistaa toisen kasasta korkeintaan $f(m)$ kiveä mutta vähintään yhden kiven. (Oma kasa säilyy muuttumattomana.) Pelin voittaa se, joka ensiksi tyhjentää toisen kasan. Osoita, että* *on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n, että Aino häviää parhaimmallakin pelitavalla, vaikka saa aloittaa ja molemmilla on aluksi yhtä monta kiveä eli n kiveä.*

Ratkaisu: $n = 16$ on pienin ratkaisu tehtävään. Todistetaan tämä, vaikka tehtävänannossa pyydetään ainoastaan etsimään jokin n, jolla Aino häviää pelin. Seuraava tulos on siis oikeastaan tarpeeton, mutta osia siitä käytetään todistettaessa varsinaista tehtävän vaatimaa tulosta.

Väite: Peli on Ainon voitto, kun $n \leq 15$.

Todistus: Jos n on alkuluku tai yksi, Aino voi tietenkin nollata toisen pelaajan kivien määrän aloitussiirrollaan.

Yleisemmin Aino voittaa kaikki ne pelitilanteen (p, m), missä hän on siirtovuorossa, p on alkuluku ja $p \geq m$. Sovelletaan tätä erityisesti niiden pelien analysoimiseen, joissa $n = 2p$ ja p alkuluku. Aino poistakoon toiselta pelaajalta suurimman sallitun määrän eli p kiveä. Tapauksessa $n = 4$ huomataan, että Väinöllä ei ole tyydyttävää vastasiirtoa: sekä $(3, 2)$ että $(2, 2)$ ovat Ainon voittoja. Tapauksessa $n = 6$ pelinkuluksi muodostuu seuraava, kun Väinö yrittää ohittaa jo tunnistetut häviöasemat:

$$\begin{array}{cccc} 6 & 4 & 3 & \\ 6 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

(Ylärivissä Ainon, alarivissä Väinön kivimäärät.) Tapauksessa $n = 10$ on useita ilmeiset sudenkuopat ohittavia pelejä:

$$\begin{array}{cccc} 10 & 9 & 8 & \\ 10 & 5 & 2 & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 10 & 8 & 6 & \\ 10 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 10 & 6 & 4 & \\ 10 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

Jäljellä on tapaus $n = 14$:

$$\begin{array}{ccccc} 14 & 12 & 10 & & \\ 14 & 7 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 14 & 10 & 8 \text{ tai } 9 & & \\ 14 & 7 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 14 & 9 & 8 & 6 & \\ 14 & 7 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 14 & 8 & 5 & 4 & \\ 14 & 7 & 6 & 1 & 0. \end{array}$$

Huomattakoon viimeisestä pelistä, että Aino poistaa Väinöltä pelitilanteessa $(8, 7)$ yhden ainoa kiven, koska $(6, 6)$ on tunnistettu voitto.

Jäljellä ovat vain tapaukset $n = 8$, $n = 9$, $n = 12$ ja $n = 15$. Tapauksessa $n = 8$ Ainon pelitapa on tuttu pelitilanteesta $(8, 7)$:

$$\begin{array}{ccc} 8 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 1. \end{array}$$

Tapauksessa $n = 9$ Väinön on vaikeata ohittaa tunnistettuja häviöasemia:

$$\begin{array}{ccccc} 9 & 8 & 6 & 5 & \\ 9 & 6 & 4 & 1 & 0. \end{array}$$

Tapaus $n = 12$ on myös suoraviivainen:

$$\begin{array}{ccccc} 12 & 10 & 8 \text{ tai } 9 & 6 \text{ tai } 8 & \\ 12 & 9 & 4 & 2 & 0. \end{array}$$

Edellistä voittoa käyttäen tapauksessa $n = 15$ jää tarkasteltavaksi

$$\begin{array}{ccccc} 15 & 14 & 12 & 10 & \\ 15 & 12 & 6 & 4 & 0. \quad \square \end{array}$$

Väite: Väinö voittaa pelin, kun $n = 16$.

Todistus: Jos Aino poistaa aloitussiirrollaan Väinön kasasta vain yhden kiven, Väinö voi poistaa Ainolta neljä $(4 \leq 5 \mid 15)$, jolloin päädytään asemaan $(12, 15)$, joka on yksi tapauksessa $n = 15$ esiintyneistä asemista paitsi, että roolit ovat vaihtuneet, joten Väinö voittaisi tässä tapauksessa. Ainon on siis yritettävä kahden kiven poistamista tässä tapauksessa, ja pelinkulku on

$$\begin{array}{cccccc} 16 & 9 & 8 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 14 & 12 & 10 & 8 \text{ tai } 9 & 7 \text{ tai } 8. \quad \square \end{array}$$

$\square$

5. *Ratkaise Diofantoksen yhtälö*

$$x^{2018} - y^{2018} = (xy)^{2017},$$

kun x ja y ovat epänegatiivisia kokonaislukuja.

Ratkaisu: Jos toinen luvuista on nolla, on toisenkin oltava. Pari $(0, 0)$ on ratkaisu.

Oletetaan nyt, että molemmat luvuista ovat nollasta poikkeavia. Nyt

$$x^{2018} > x^{2018} - y^{2018} = (xy)^{2017},$$

joten $x > y^{2017}$. Lisäksi molempien lukujen alkutekijöiden on oltava samat. Koska $y < x$, on oltava alkuluku p, jolla pätee $p^\alpha \mid y$, $p^{\alpha+1} \nmid x$, $p^\beta \mid y$, $p^{\beta+1} \nmid y$ ja $\alpha > \beta$. Merkitään tätä $p^\alpha \parallel x$ ja $p^\beta \parallel y$. Nyt

$$p^{2018\alpha} \parallel x^{2018}, \quad p^{2018\beta} \parallel y^{2018}, \quad \text{ja} \quad p^{2017(\alpha+\beta)} \parallel (xy)^{2017}.$$

Erityisesti siis

$$\min(p^{2017(\alpha+\beta)}, p^{2018\alpha}) \mid y^{2018}.$$

Koska $2018\alpha > 2018\beta$, on pädettävä $p^{2017(\alpha+\beta)} \mid p^{2018\beta}$, eli $2017(\alpha + \beta) \leq 2018\beta$, eli $2017\alpha \leq \beta$, mikä on mahdotonta. Ainoa ratkaisu on siis $(x, y) = (0, 0)$. $\square$