31. 10.

# Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

2018

## Perussarjan monivalintatehtävät

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | − | − | + | − |
| 2. | − | − | + | − |
| 3. | + | + | + | − |
| 4. | + | + | − | − |
| 5. | + | − | + | + |
| 6. | + | + | − | − |

**P1.** Merkitään lukion A oppilasmäärää vuoden 2017 alussa $x$:llä ja lukion B oppilasmäärää $y$:llä. Vuoden 2017 lopussa oppilasmäärät ovat siis $a = 1{,}05x$ ja $b = 1{,}10y$, mistä saadaan vuoden 2017 alun oppilasmäärien suhteeksi

$$\frac{x}{y} = \frac{a/1{,}05}{b/1{,}10} = \frac{1{,}10a}{1{,}05b} = \frac{22a}{21b}.$$

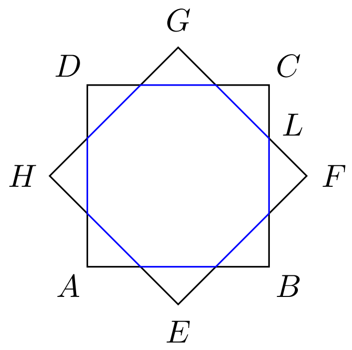
Siis kohta c on oikein, ja muut väärin, koska niissä annetut vastaukset eivät ole yhtä suuria oikean vastauksen kanssa.

**P2.** Koska $k^{2x} = 16$ ja $k > 0$, niin

$$k^{3x} - k^x = (k^{2x})^{3/2} - (k^{2x})^{1/2} = 16^{3/2} - 16^{1/2} = 16\sqrt{16} - \sqrt{16} = 16 \cdot 4 - 4 = 60.$$

Siis kohta c on oikein. Sen sijaan muut kohdat ovat väärin, sillä $60 \neq 56$ on rationaaliluku, ja vastaus on riippumatoman lukujen $k$ ja $x$ arvoista, kunhan oletukset pätevät.

**P3.** Koska kaikki kuvatulla tavalla 16-kulmiot ovat yhdenmuotoisia, voidaan olettaa, että alkuperäisen neliön kärjet ovat pisteissä $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$ ja $D = (-1, 1)$. Koska neliön $ABCD$ lävistäjän pituus on $2\sqrt{2}$ ja kierretyn neliön lävistäjät ovat koordinaattiakseleilla origon suhteen symmetrisesti, kierretyn neliön $EFGH$ kärjet ovat siis $E = (\sqrt{2}, 0)$, $F = (0, \sqrt{2})$, $G = (-\sqrt{2}, 0)$ ja $H = (0, -\sqrt{2})$. Edelleen huomataan, että syntyvän 16-kulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, vaikka se ei ole säännöllinen, sillä 16-kulmion on symmetrinen $45°$ asteen kierron suhteen.




Lasketaan neliöiden sivujen $BC$ ja $FG$ leikkauspisteen $L$ koordinaatit. Koska $B = (1, -1)$ ja $C = (1, 1)$, niin $L = (1, y)$. Toisaalta sivulla $FG$ koordinaattien summa on $\sqrt{2}$, joten $y = \sqrt{2} - 1$. Tästä seuraa, että 16-kulmion sivun pituus on

$$|LC| = |1 - y| = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}.$$

Piirien suhde on siis

$$\frac{16 \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 \cdot 2} = 2 \cdot (2 - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Toisaalta

$$\frac{4}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{2^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 \cdot (2 - \sqrt{2}),$$

joten kohdat b ja c ovat molemmat oikein. Toisaalta $4 - 2\sqrt{2} < 4 - 2 \cdot 1{,}4 = 4 - 2{,}8 = 1,2$, joten myös kohta a on oikein. Sen sijaan $\frac{2\sqrt{2}+1}{2} > \frac{2+1}{2} = 1{,}5$, joten kohta d on väärin.

**P4.** Kun $x \neq 1$, niin

$$\begin{aligned}\frac{2x + a^2 - 3a}{x - 1} = a &\iff 2x + a^2 - 3a = a(x - 1) = ax - a \\ &\iff (2 - a)x + a^2 - 2a = 0 \iff (2 - a)(x - a) = 0.\end{aligned}$$

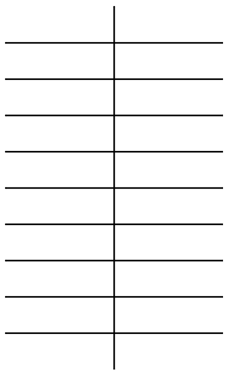
Jos $a = 2$, niin yhtälö supistuu identtisesti todeksi yhtälöksi, joten vaihtoehto a on oikein. Jos $a \neq 2$, niin $(2-a)(x-a) = 0 \iff x = a$, mutta koska $x \neq 1$, niin yhtälölle ei jää ratkaisuja, kun $a = 1$. Siis kohta b on oikein. Vaihtoehdot c ja d ovat ristiriidassa kohdan b kanssa, joten ne ovat väärin.

**P5.** Olkoon $m(k)$ pienin mahdollinen määrä alueita ja $M(k)$ suurin mahdollinen määrä alueita, jotka syntyvät, kun $k$ suoraa jakaa tason alueisiin. Selvästi $m(1) = M(1) = 2$. Jokainen lisätty suora lisää alueiden määrää vähintään yhdellä ja enintään $k+1$:lla, missä $k$ on tasoon aiemmin piirrettyjen suorien määrä, ts. $m(k+1) = m(k)+1$ ja $M(k+1) = M(k)+k+1$. Jälkimmäisen rekursiokaavan voi päätellä niin, että lisättävällä suoralla on korkeintaan $k$ leikkauspistettä aiemmin piirrettyjen suorien kanssa, joten aiemmat suorat jakavat uuden suoran korkeintaan $k+1$:ksi janaksi ja puolisuoraksi, jotka ovat uusien alueiden reunoja. Erityisesti saadaan

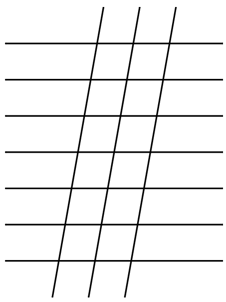
$$m(10) = m(1) + 9 = 2 + 9 = 11 \text{ ja } M(10) = M(1) + \sum_{k=1}^{9}(k+1) = 2 + 9 \cdot 6 = 56.$$

Vaihtoehto c on siis oikein ja b väärin.

Koska $11 < 20 < 32 < 56$, täytyy erikseen tutkia, voidaanko kymmenen suoraa asetella sopivalla tavalla niin, että alueiden määräksi tulee 20 tai 32. Molemmat osoittautuvat mahdollisiksi. 20 aluetta saadaan niin, että 9 yhdensuuntaista suoraa jakaa tason ensin 10 osaan ja yksi erisuuntainen puolittaa alueet.



Vastaavasti $32 = 4 \cdot 8$, mikä määrä alueita saadaan, kun 7 yhdensuuntaista suoraa jakaa ensin tason 8 osaan ja sen jälkeen 3 näiden kanssa erisuuntaista, mutta keskenään samansuuntaista suoraa jakaa kunkin osan neljään alueeseen.

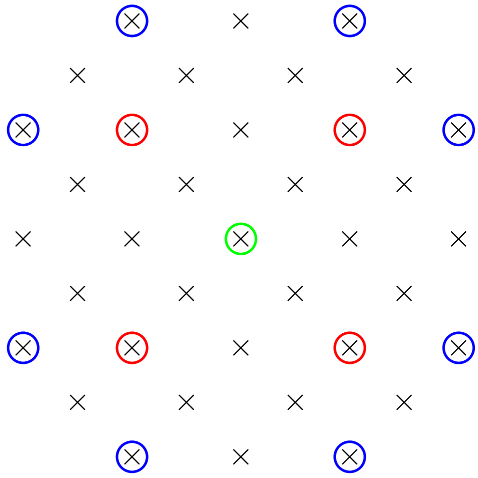


Vaihtoehdot a ja d ovat siis oikein.

**P6.** Kahden loikan jälkeen sammakko on pisteessä $(x, y)$, jolle $x + y$ on parillinen ja $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 2\sqrt{5}$ eli $x^2 + y^2 \leqslant 20$. Tällaiset pisteet ovat kaikki neliön $[-4, 4] \times [4, 4]$ sisällä, mutta eivät ole ao. neliön kärkiä. Huomataan, että näitä pisteitä on

$$\lceil 9^2/2 \rceil - 4 = 37$$

kappaletta. Tarkastellaan ensin eri kahden loikan tapauksia.



a) Jos $(x, y) = (\pm 4, \pm 2)$ tai $(x, y) = (\pm 2, \pm 4)$, niin sammakko pääsee pisteeseen $(x, y)$ kahdella loikalla vain yhdellä tavalla. Näitä pisteitä (merkitty kuvassa sinisellä ympyrällä $\bigcirc$) on 8 kappaletta.

b) Sammakko ei itse asiassa pääse kahdella loikalla lainkaan pisteisiin $(\pm 2, \pm 2)$, joita on neljä kappaletta (kuvassa $\bigcirc$). Kaikkiin muihin 33 pisteeseen sammakko pääsee.

c) Sammakko pystyy yhdellä loikalla siirtymään kahdeksaan eri pisteeseen, ja pääsee tietenkin mistä tahansa niistä palaamaan origoon (kuvassa $\bigcirc$.

d) Jos $(x, y)$ on jokin muu kahdella loikalla tavoitettavissa oleva piste, niin sen voi tavoittaa kahdella eri tavalla, sillä origo- ja $(x, y)$-keskiset, $\sqrt{5}$-säteiset ympyrät leikkaavat kahdessa pisteessä.

Kahdella viimeisellä loikalla sammakko joutuu palaamaan takaisin siitä pisteestä, mihin se joutui kahdella ensimmäisellä, ja paluutuplaloikka on samassa tapauskategoriassa kuin menotuplaloikka. Siten erilaisia neljän loikan sarjoja on

$$8 \cdot 1^2 + 1 \cdot 8^2 + (37 - 12 - 1) \cdot 2^2 = 8 + 64 + 24 \cdot 4 = 168.$$

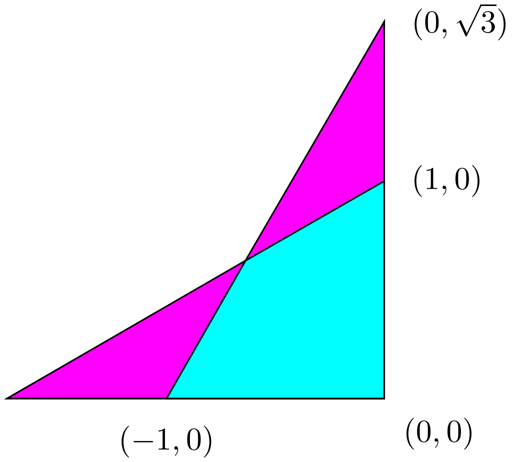
Koska $80 < 100 < 168$, niin kohta a on oikein ja d väärin. $168 = 21 \cdot 8$, joten $8 \mid 168$, mutta selvästi $5 \nmid 168$. Siis b on oikein ja c väärin.

## Perussarjan perinteiset tehtävät

**P7.** Koska $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, niin yhtälön $x^2 - y^2 = 2018$ ratkaisut saataisiin sopivasta kokonaisluvun 2018 tekijöihinjaosta. Oletetaan, että nämä kokonaisluvut olisivat $a$ ja $b$ eli $2018 = ab$, ja jollekin ratkaisulle pätisi $x + y = a$ ja $x - y = b$. Tällöin

$2x = (x+y)+(x-y) = a+b$, joten tekijöihinjaossa tekijöiden summan pitäisi olla parillinen. Kuitenkin luvun 2018 alkutekijäesitys on $2018 = 2 \cdot 1009$, joten missä tahansa tekijöihinjaossa toinen tekijä on parillinen ja toinen pariton. Siis Diofantoksen yhtälöllä ei ole ratkaisua.

**P8.** Tehtävän kuviossa on kaksi ns. koululaisen kolmiota, jotka saadaan puolittamalla tasasivuinen kolmio pitkin keskijanaa. Siis pienemmän kateetin pituus on 1, hypotenuusan 2 ja suuremman kateetin $\sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}$. Piirretään kolmiot koordinaatistoon, yhteinen suora kulma origoon.




Tehtävässä kysytään kuvan syaaninvärisen nelikulmion pinta-alaa; selvitetään ratkaisua varten nelikulmion neljännenkin kärjen koordinaatit.

Hypotenuusojen yhtälöt ovat

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1, \end{cases}$$

sillä kulmakertoimet ovat kateettien suhteiden mukaiset ja hypotenuusat päättyvät $y$-akselille tunnettuihin pisteisiin. Hypotenuusojen leikkauspisteen $x$-koordinaatiksi saadaan

$$\sqrt{3}x + \sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1,$$

eli

$$x = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-3}{2}.$$

Symmetrian avulla (tai yhtälöihin sijoittamalla) saadaan $y$-koordinaatiksi

$$y = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Merkitään selvitettävää pinta-alaa $A$:lla. Kummankin koululaisen kolmion pinta-ala on $1 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$, joten koko kuvion pinta-ala on $\sqrt{3} - A$. Toisaalta alemman sinipunaisen kolmion $x$-akselilla sijaitsevan kannan pituus on $\sqrt{3} - 1$ ja sitä vastaava korkeus nelikulmion neljännen kärjen $y$-koordinaatti eli $(3 - \sqrt{3})/2$. Siis sinipunaisen kolmion pinta-ala on

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{3 - \sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - 1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 3).$$

Kuvion pinta-ala tämän avulla laskettuna on

$$2\sqrt{3} - 3 + A,$$

mistä saadaan yhtälö

$$\sqrt{3} - A = 2\sqrt{3} - 3 + A \iff 3 - \sqrt{3} = 2A \iff A = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

**Vastaus:** *Yhteinen pinta-ala on* $(3 - \sqrt{3})/2$.

# Välisarjan monivalintatehtävät

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 1. | + | − | − | + |
| 2. | + | + | + | − |
| 3. | + | − | + | − |

**V1.** Merkitään aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotusta $d$:llä ja jäsenten lukumäärää $2k$:lla, missä $k \in \mathbb{Z}_+$. Järjestysluvultaan parittomista jäsenistä ensimmäinen on 1 ja viimeinen $1 + (2k-2)d$, parillista järjestyslukua olevilla nämä ovat vastaavasti $1 + d$ ja $1 + (2k-1)d$. Tiedetään, että

$$k \cdot \frac{1 + (1 + (2k-2)d)}{2} = 190 \text{ ja } k \cdot \frac{(1+d) + (1 + (2k-1)d)}{2} = 210,$$

mistä seuraa

$$20 = 210 - 190 = k \cdot \frac{(1+d) + (1+(2k-1)d)}{2} - k \cdot \frac{1 + (1+(2k-2)d)}{2} = k \cdot \frac{d+d}{2} = kd.$$

Siis $210 = k \cdot \frac{(1+d)+(1+(2k-1)d)}{2} = k(1 + kd) = k \cdot 21$, joten $k = 10$ ja $d = 2$. Jonossa on siis $2k = 20$ jäsentä (kohta a on oikein), mutta peräkkäisten erotus on vain 2 (kohta b väärin). Lukujonon viimeinen jäsen on $1 + (2k-1)d = 1 + 19 \cdot 2 = 39$, joten c on väärin ja d oikein.

**V2=P3.**

**V3.** Luku $8xy + 2 = 2(4xy + 1)$ on aina parillinen ja yhdistetty luku, sillä $4xy + 1 > 1$. Siis $x^2 + 4y^2 + 1 < 8xy + 2$, koska luku $x^2 + 4y^2 + 1$ on alkuluku. Luvun $8xy + 2$ suurin tekijä on luonnollisesti $8xy + 2$, ja toiseksi isoin on $(8xy + 2)/2 = 4xy + 1$. Siispä $x^2 + 4y^2 + 1 \leqslant 4xy + 1$. Tästä seuraa

$$(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 \leqslant 0.$$

Koska neliö $(x - 2y)^2$ on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla, on itse asiassa oltava $(x - 2y)^2 = 0$, eli $x = 2y$. Siten luku $x$ on parillinen ja a)-kohta tosi. Ja c)-kohdan osamäärä on

$$\frac{8xy + 2}{x^2 + 4y^2 + 1} = \frac{16y^2 + 2}{8y^2 + 1} = 2,$$

ja koska $2 < 4$, on myös c)-kohta varmasti tosi.

Toisaalta, jos valitaan vaikkapa $x = 6$ ja $y = 3$, niin luku

$$x^2 + 4y^2 + 1 = 73$$

on alkuluku ja luku

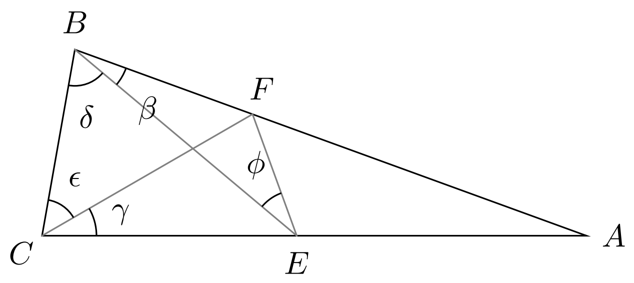
$$8xy + 2 = 146 = 2 \cdot 73$$

on jaollinen luvulla $x^2 + 4y^2 + 1$, eli tämä lukupari toteuttaa tehtävänannon ehdot. Koska luku 3 ei ole parillinen, eikä luku 146 viidellä jaollinen, eivät kohdat b) ja d) välttämättä pidä paikkaansa.

## Välisarjan perinteiset tehtävät

**V4.**

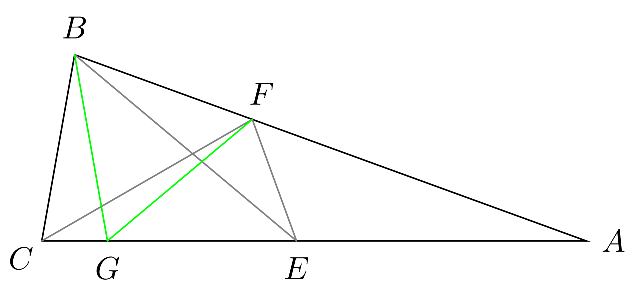
Alla on tehtävästä mittatarkka kuva.




Huomataan, että kuvaan liittyvistä kolmioista $ABC$, $BCF$ ja $EAB$ ovat tasakylkisiä (huippu mainittu ensin), sillä

$$\begin{cases} \sphericalangle ABC = \beta + \delta = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = 50^\circ + 30^\circ = \epsilon + \gamma = \sphericalangle BCA \\ \sphericalangle BCF = \epsilon = 50^\circ = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 180^\circ - (\beta + \delta) - \epsilon = \sphericalangle CFB \\ \sphericalangle EAB = \sphericalangle CAB = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ = \beta = \sphericalangle ABE. \end{cases}$$

Erityisesti $|AB| = |AC|$, $|BC| = |BF|$ ja $|AE| = |BE|$. Otetaan vielä käyttöön apupiste, joka sijaitsee sivulla $AC$ niin, että kolmio $BCG$ on myös tasakylkinen ja $B$ sen huippu.



Koska $\sphericalangle GBC = 180° - 2\sphericalangle BCG = 180° - 2\sphericalangle BCA = 180° - 2 \cdot 80° = 20°$, niin $\sphericalangle FBG = \sphericalangle FBC - \sphericalangle GBC = \beta + \delta - 20° = 60°$. Koska lisäksi $|BF| = |BC| = |BG|$, niin kolmio $BGF$ on tasasivuinen ja siten $|FG| = |BF| = |BG|$. Kun huomataan vielä, että kolmio $GEB$ on myös tasakylkinen ($\sphericalangle GEB = 180° - \sphericalangle AEB = 180° - (180°2 \cdot 20°) = 40°$ ja samoin $\sphericalangle EBG = \sphericalangle EBC - \sphericalangle GBC = \delta - 20° = 40°$), niin saadaan $|EG| = |BG| = |FG|$, joten kolmio $GEF$ on tasakylkinen. Tästä seuraa $\sphericalangle GEF = (180° - 40°)/2 = 70°$. Siis $\phi = \sphericalangle GEF - \sphericalangle GEB = 70° - 40° = 30°$.

**Vastaus:** $\phi = 30°$.

**V5.** Yhtälö voidaan sieventää ensin muotoon

$$x^2 + 2x + 1 + (x+1)\,y = 101,$$

ja sitten muotoon

$$(x+1)^2 + (x+1)\,y = 101,$$

ja edelleen muotoon

$$(x+1)\,(x+1+y) = 101.$$

Luku 101 on alkuluku, ja vasemman puolen molemmat tekijät ovat kokonaislukuja. Siten kokonaisluvut $x$ ja $y$ toteuttavat alkuperäisen yhtälön täsmälleen silloin, kun jokin seuraavista pätee:

$$\begin{cases} x+1 = -101 \\ x+1+y = -1 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x+1 = -1 \\ x+1+y = -101 \end{cases}$$

tai

$$\begin{cases} x+1 = 1 \\ x+1+y = 101 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x+1 = 101 \\ x+1+y = 1. \end{cases}$$

Jokaisella näistä yhtälöpareista on yksikäsitteinen kokonaislukuratkaisu. Kun nämä yhtälöparit ratkaisee, saamme tulokseksi, että kokonaisluvut $x$ ja $y$ ratkaisevat alkuperäisen yhtälön täsmälleen silloin kun

$$\begin{cases} x = -102 \\ y = 100 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -100 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 100 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = 100 \\ y = -100. \end{cases}$$

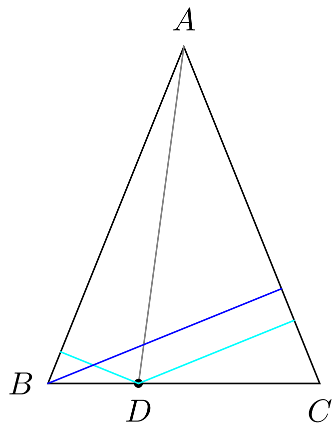
**V6.** Kymmenen rastia riittää, sillä näillä ruudukosta voidaan täyttää kaksi riviä, ja yhden rastin poistaminen jättää aina yhden kokonaisen rivin. Tarkastellaan toisaalta tapausta, jossa rasteja on korkeintaan yhdeksän. Jos asetelmassa on vain kerran viisi rastia peräkkäin, niin niistä voi sopivan rastin pyyhkimällä saada aikaan lopputuloksen, jossa ei ole rasteja peräkkäin. Vielä triviaalimpi on tilanne, jossa alun perinkään ei ole viittä rastia peräkkäin. Oletetaan siis, että asetelmassa olisi ainakin kaksi viiden peräkkäisen suoraa. Näiden on pakko leikata, sillä muuten rasteja olisi valmiiksi kymmenen. Kahdessa viiden suorassa on siis rasteja yhteensä $5 + 5 - 1 = 9$, joten muita rasteja ei voi olla. Siis pyyhkimällä leikkausrasti saadaan kaikki viiden peräkkäiset suorat poistettua. Siis yhdeksän rastia ei riitä.

**Vastaus:** *Kymmenen rastia riittää ja tarvitaan.*

# Avoin sarja

**A1=P7.**

**A2.** Olkoon $ABC$ teräväkylkinen kolmio, $d$ pisteen $B$ etäisyys sivusta $AC$, $D$ sivun $BC$ piste, $d_0$ pisteen $D$ etäisyys sivusta $AC$ ja $d_1$ sivusta $AB$. Esimerkkikuva on tasakylkinen, etäisyys $d$ on merkitty sinisellä sekä etäisyydet $d_0$ ja $d_1$ syaanilla.




Huomataan, että jana $AD$ jakaa kolmion $ABC$ kolmioihin $ABD$ ja $ADC$. Lasketaan kolmion $ABC$ pinta-ala kahdella tavalla, toisaalta vetoamalla siihen, että $d$ on sivun $AC$ vastainen korkeus, toisaalta laskemalla pinta-ala pikkukolmioiden pinta-alojen summana. Saadaan

$$\frac{d}{2}|AC| = \frac{d_0}{2}|AB| + \frac{d_1}{2}|AC|.$$

Jos $|AB| = |AC|$, niin tämä yhtälö supistuu muotoon $d = d_0 + d_1$. Jos taas $|AB| < |AC|$ ja $D \neq B$, niin

$$\frac{d}{2}|AC| = \frac{d_0}{2}|AB| + \frac{d_1}{2}|AC| < \left(\frac{d_0}{2} + \frac{d_1}{2}\right)|AC|,$$

mistä seuraa $d < d_0 + d_1$. Jäljelle jäävässä vaihtoehdossa $|AB| > |AC|$ ja $D \neq B$ saadaan vastaavasti $d > d_0 + d_1$. Siis kun $|AB| \neq |AC|$, niin myös $d \neq d_0 + d_1$ riippumatta pisteestä $D$, kunhan $D \neq B$. $\square$

**A3.** Ritarit saavat joka lähtötilanteesta kaikki lamput sammutettua, paitsi jos $3 \mid n$.

Tarkastellaan katkaisimien painallusjonojoa. Ensimmäinen huomio on, että jokaisen lampun kannalta vain sillä, onko sen läheisyydessä olevia kolmea katkaisinta painettu parittoman vain parillisen monta kertaa, on merkitystä. Tämä myös merkitsee, että minkään ritarin ei kannata painaa katkaisintaan kuin korkeintaan kerran. Oletetaan jatkossa, ettei kukaan ritareista siis paina nappiaan kahdesti tai useammin. Painallusten järjestyksellä ei myöskään ole väliä, joten tarkasteltavana on $2^n$ erilaista painallusyhdistelmää. Huomattakoon, että lamppujen erilaisia aloitustiloja on myös $2^n$. Tarkastellaan kahta tapausta sen mukaan, onko $n$ jaollinen kolmella. Indeksöidään ritarit syklisesti modulo kolme.

a) Oletetaan, että $3 \mid n$. Jos kaikki lamput ovat aluksi poissa päältä, niin on ritarien tehtävällä on triviaali ratkaisu, nimittäin olla painamatta mitään katkaisinta. On kuitenkin myös epätriviaali ratkaisu, nimittäin ensin kaikki ritarit, jotka on indeksöity kolmella jaollisilla luvilla, painavat katkaisinta, jolloin kaikki lamput syttyvät. Sen jälkeen kaikki indeksejä $k \equiv 1 \pmod 3$ olevat ritarit tekevät saman, ja lamput sammuvat. Koska yhteen alkuasetelmista on ainakin kaksi ratkaisua ja alkutiloja on yhtä monta kuin tarkasteltavia oleellisesti erilaisia painallusjonoja, niin kaikkia alkutiloja ei pystytä ratkaisemaan.

b) Oletetaan, että $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Riittää osoittaa, että jos kaikki lamput ovat aluksia sammuksissa, niin ritarit pystyvät sytyttämään minkä tahansa yksittäisen lamput. Voidaan olettaa, että tämä on lamppu 2. Kun ritarit 1 ja 2 painavat katkaisintaan, niin lamput 0 ja 3 jäävät päälle ja muut ovat sammuksissa. Vastaavasti jokaisella kokonaisluvulla $k$ on mahdollista vaihtaa lamppujen $3k$ ja $3k+3$ tila (muiden pysyessä ennallaan), joten induktiolla päästään tilaan, jossa lamput 0 ja $3k$ ovat päällä ja muut sammuksissa. Koska $\mathrm{syt}(n, 3) = 1$, kokonaisluku $k$ voidaan valita niin, että $3k \equiv 1 \pmod n$. Tällä luvun $k$ valinnalla päästään tilaan, jossa lamput 0 ja 1 ovat päällä ja muut sammuksissa. Kun ritari 1 nyt painaa katkaisintaan, niin vain lamppu 2 on päällä.

**A4.**

Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 100 - \frac{x}{2}$$

toteuttaa tehtävänannon ehdot, sillä se on polynomina jatkuva, ja sille pätee $f(150) = 100 - 150/2 = 100 - 75 = 25$ ja

$$\begin{aligned} f(x) + f(2f(x)) &= 100 - \frac{x}{2} + 100 - \frac{1}{2}\left(2 \cdot \left(100 - \frac{x}{2}\right)\right) \\ &= 100 - \frac{x}{2} + 100 - 100 + \frac{x}{2} = 100, \end{aligned}$$

kun $x \in \mathbb{R}$. Siten luvun $f(100)$ yksi mahdollinen arvo on $100 - 100/2 = 100 - 50 = 50$.

Olkoon sitten $f$ mikä tahansa tehtävänannon ehdot toteuttava funktio. Koska

$$f(50) = f(2 \cdot 25) = f(2f(150)) = 100 - f(150) = 100 - 25 = 75,$$

saa $f$ molemmat arvoista 25 ja 75. Jatkuvana funktiona sen täytyy myös saada arvo 50 jossakin pisteessä $a \in \,]50, 150[$. Nyt

$$f(100) = f(2 \cdot 50) = f(2f(a)) = 100 - f(a) = 100 - 50 = 50.$$

Siis luvun $f(100)$ ainoa mahdollinen arvo on 50.

**Vastaus:** 50 *on ainoa mahdollinen luvun* $f(100)$ *arvo.*