30. 10. 2017

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut

Perussarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$-$	$+$
2.	$+$	$-$	$-$	$+$
3.	$-$	$+$	$-$	$+$
4.	$+$	$+$	$-$	$+$
5.	$-$	$+$	$-$	$-$
6.	$-$	$-$	$+$	$-$

P1. Lehtipuiden lukumäärä olkoon aluksi n, jolloin havupuiden määrä on $1{,}4n$. Hakkuiden jälkeen lehtipuiden määrä putoaa lukuun $n - 0{,}12n = 0{,}88n$ ja havupuiden lukuun $(1 - 0{,}2) \cdot 1{,}4n = 0{,}8 \cdot 1{,}4n = 1{,}12n$, joten havupuiden osuus on hakkuiden jälkeen on

$$\frac{1{,}12n}{0{,}88n + 1{,}12n} = \frac{1{,}12}{2} = 0{,}56 = 56\,\% = \frac{14}{25}.$$

Siis kohdat b ja d ovat oikein, a ja c sen sijaan väärin.

P2. Olkoon oppilaiden lukumäärä $100n$. Tänään sairaita on $20n$ ja terveitä $80n$. Terveistä on huomenna sairaita 5% eli

$$\frac{5}{100} \cdot 80n = 4n.$$

Sairaista on huomennakin sairaita

$$\frac{55}{100} \cdot 20n = 11n.$$

Huomenna sairaita on siis $4n + 11n = 15n$ eli 15 % kaikista. Vaihtoehdot a ja d ovat siis oikein, b ja c sen sijaan väärin.

P3. Ratkaistaan ensin yhtälöt:

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff (x-1)(x+2) = 0 \iff x = 1 \lor x = -2$$

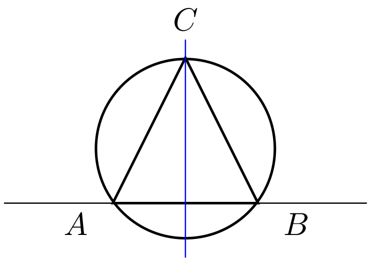
ja

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \iff (y-1)(y-2) = 0 \iff y = 1 \lor y = 2.$$

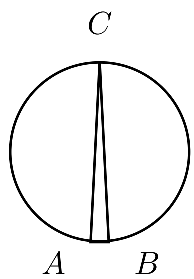
On siis mahdollista, että $x = y = 1$ (kohta a väärin), ja selvästi xy on kokonaisluku (b oikein). $x + y$ ei välttämättä ole positiivinen, sillä $-2 + 1 = -1 < 0$ (c väärin.) Eri mahdollisuudet summalle $x + y$ ovat 2, 3, -1 tai 0. joten kohta d on oikein.

P4. Kohta a seuraa suoraan klassisesta Thaleen lauseesta ja sen käänteislauseesta. Sen voi päätellä myös kehäkulmalauseesta: Koska ABC on tasakylkinen, ainoastaan sen huippukulma ACB voi olla suora. Tehtävän ympyrä on kolmion ABC ympärysympyrä, joten kehäkulmalauseen mukaan $\sphericalangle ACB = 90°$, jos ja vain jos jännettä AB vastaava keskuskulma on oikokulma. Tällöin AB on tietenkin ympyrän halkaisija.

Tasakylkisen kolmion ABC korkeusjana on tietenkin osa jänteen AB keskinormaalista, joten kohta b on myös oikein.



Kohta c ei pidä paikkaansa, sillä kolmion ABC korkeus on aina korkeintaan ympyrän halkaisija, kun taas kanta AB voi olla mielivaltaisen lyhyt.



Kohta d pitää paikkansa sen tähden, että kolmion ABC korkeus on aina vähintään ympyrän säteen pituus, jolloin kylkien pituuksien summa on jo vähintään ympyrän halkaisija.

P5. Tehtävän oletuksesta saadaan

$$\begin{aligned}
|x| < \frac{1}{2} &\iff -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\
&\iff -\frac{3}{2} < x - 1 < -\frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \quad |x-1| > \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

joten

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{\overbrace{|x|}^{<1/2}}{\underbrace{|x-1|}_{>1/2}} < \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

Siis kohta b on oikein. Kohdat a ja c eivät päde, sillä $x = 0$ toteuttaa oletuksen, mutta $|0/(0-1)| = 0$ ei ole välillä $[\frac{1}{2}, 1]$ eikä ei ole välillä $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Kohta d on tietenkin väärin, koska kohta b on oikein.

P6. Ratkaistaan yhtälö

$$\begin{aligned}
3 \cdot 3^x + 3^{-x} = 4 &\iff 3^x(3 \cdot 3^x + 3^{-x}) = 3^x \cdot 4 \qquad\qquad | \quad 3^x \neq 0 \\
&\iff 3 \cdot 3^{2x} + 1 = 3^x \cdot 4 \\
&\iff 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0 \\
&\iff 3^x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} \\
&\iff 3^x = 1 \vee 3^x = \frac{1}{3}. \\
&\iff x = 0 \vee x = -1.
\end{aligned}$$

Siis ratkaisuja on täsmälleen kaksi, joten kohta c on ainoa oikea.

Huomautus: Yhtälöä ei ole tarpeen ratkaista loppuun asti, jotta tietäisi, että ratkaisuja on täsmälleen kaksi. Sijoittamalla $t = 3^x$ saadaan nimittäin toisen asteen yhtälö $3t^2 - 4t + 1 = 0$, jolla on kaksi ratkaisua, sillä diskriminantti $(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$ on positiivinen. Lisäksi nämä ratkaisut ovat positiivisia, koska vakiotermi on positiivinen ja ensimmäisen asteen termin kerroin on negatiivinen, joten saatuja t:n arvoja vastaavat x:n arvot.

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Yhden sinisen renkaan ala on $(2k+1)^2 - (2k)^2 = 4k + 1$, missä k on parillinen kokonaisluku ja $k < 100$. Kokonaisala on siis

$$\begin{aligned}
&\pi\left(1^2 - 0^2 + 3^2 - 2^2 + 5^2 - 4^2 + \cdots + 99^2 - 98^2\right) \\
=&\pi(1 + 5 + 9 + \cdots + 4 \cdot 49 + 1) \\
=&50\pi + 4\pi\frac{49 \cdot 50}{2} = 50\pi + 2\pi 49 \cdot 50 = 4950\pi.
\end{aligned}$$

P8. Merkitään kysymys-vastaus-sarjoja seuraavasti: Jos kysymykseen "Onko se s" saadaan myönteinen vastaus, merkitään yksinkertaisesti s, jos kielteinen, niin sen sijaan $\bar{s}$. Esimerkiksi $a\bar{c}b$ tarkoittaa siis, että kysymykseen "Onko se a" on saatu myönteinen vastaus, kysymykseen "Onko se c" sen sijaan kielteinen, ja kysymykseen "Onko se b" jälleen myönteinen vastaus. Jos w on tällainen kysymys-vastaus-sarja ja siitä voidaan päätellä, että Veeran valitsema alkio oli s, merkitään $w \to s$.

Väite: Oletetaan, että Kari kysyy kolmella ensimmäisellä kysymyksellään ensin, onko valittu alkio a, sitten onko se b ja lopuksi uudelleen, onko se a. Jos Veera vastaa ainakin kahdesti myönteisesti, niin Kari voi päätellä valitun alkion.

Todistus: Huomataan ensin, että

$$aba \to a,\ a\bar{b}a \to a.$$

Koska nimittäin kolmesta peräkkäisestä Veeran vastauksesta korkeintaan yksi on vale, niin Veeran on täytynyt puhua totta vastatessaan kahdesti myönteisesti kysymykseen "Onko se a?". Jäljelle jäävissä tapauksissa saadaan

$$ab\bar{a} \to b,\ \bar{a}ba \to b.$$

Veera on nimittäin valehdellut jo kerran vastatessaan kysymyksiin a:sta, joten myönteinen vastaus b:stä on rehellinen. $\square$

Väite: Oletetaan, että kysymys-vastaus-sarjan alku on $a\bar{b}\bar{a}$ tai $\bar{a}\bar{b}a$. Tällöin Kari pystyy selvittämään Veeran valitseman alkion korkeintaan kahdella jatkokysymyksellä.

Todistus: Kari tietää Veeran valehdelleen ainakin kerran kysymyksiin a:sta, joten epäävä vastaus b:stä on rehellinen. Siis valittu alkio on a tai c, joten Kari jatkaa kysymällä "Onko se c?" ja toistaa kysymyksen, jos se on tarpeen. Jos Veera vastaa näihin kysymyksiin kahdesti samalla tavalla, niin Kari tietää vastauksen perusteella valitun alkion. Muuten Kari tietää Veeran valehdelleen ainakin kerran, joten kolmas vastaus on rehellinen ja Kari päättelee valitun alkion sen perusteella. Tarkemmin saadaan

$$a\bar{b}\bar{a}c, a\bar{b}\bar{a}\bar{c}c, \bar{a}\bar{b}a\bar{c}c, \bar{a}\bar{b}acc \to c,$$
$$a\bar{b}\bar{a}\bar{c}\bar{c}, \bar{a}\bar{b}ac\bar{c} \to a. \quad \square$$

Väite: Oletetaan, että kysymys-vastaus-sarjan alku on $\bar{a}b\bar{a}$ tai $\bar{a}\bar{b}\bar{a}$. Tällöin Kari pystyy selvittämään valitun alkion kaikkiaan kuudella kysymyksellä.

Todistus: Kolmen ensimmäisen vastauksen perusteella Kari tietää, että valittu alkio on b tai c. Hän kysyy ensin uudestaan, onko alkion b, ja varautuu kysymään sen jälkeen kahdesti, onko alkio c. Jos Veeran vastaus toiseen kysymykseen oli myönteinen, niin voidaan päätellä

$$\bar{a}b\bar{a}b \to b,\ \bar{a}b\bar{a}\bar{b}c \to c,$$
$$\bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{c}c \to c,\ \bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{c} \to b.$$

Jos toinen vastaus sen sijaan oli kielteinen, niin

$$\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}, \bar{a}\bar{b}\bar{a}bcc \to c$$
$$\bar{a}\bar{b}\bar{a}bc\bar{c}, \bar{a}\bar{b}\bar{a}b\bar{c} \to b. \quad \square$$

Näistä aputuloksista seuraa ratkaisu.

Vastaus: *Kari pystyy kuudella kysymyksellä selvittämään Veeran valitsemaan alkion.*

Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$-$	$-$
2.	$-$	$-$	$+$	$-$
3.	$-$	$+$	$-$	$+$

V1=P5.
V2=P6.
V3. Ratkaistaan yhtälö:

$$
\begin{aligned}
& x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2+a^2}} \\
\implies \quad & \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2+a^2}} = a - x \quad \implies \quad a^2 - x\sqrt{x^2+a^2} = a^2 - 2ax + x^2 \\
\implies \quad & 0 = x^2 - 2ax + x\sqrt{x^2+a^2} \\
\implies \quad & 0 = x(x - 2a + \sqrt{x^2+a^2}) \\
\implies \quad & x = 0 \vee \sqrt{x^2+a^2} = 2a - x \\
\implies \quad & x = 0 \vee x^2 + a^2 = 4a^2 - 4ax + x^2 \quad \implies \quad x = 0 \vee a^2 = 4a^2 - 4ax \\
\implies \quad & x = 0 \vee 4ax = 3a^2 \\
\implies \quad & x = 0 \vee x = \frac{3}{4}a
\end{aligned}
$$

Sijoittamalla havaitaan, että nämä todella ovat ratkaisuja:

$$a - \sqrt{a^2 - 0\sqrt{0^2+a^2}} = a - a = 0$$

ja

$$
\begin{aligned}
& a - \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a\sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + a^2}} = a - \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a\sqrt{\frac{25}{16}a^2}} \\
& = a - \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a \cdot \frac{5}{4}a} = a - \sqrt{a^2 - \frac{15}{16}a^2} = a - \sqrt{\frac{1}{16}a^2} \\
& = a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a,
\end{aligned}
$$

sillä $a > 0$. Siis kohta d on oikein ja c väärin. Koska ratkaisuja on kaksi ja molemmat ovat epänegatiivisia, niin kohta a on väärin ja kohta b oikein.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4=P7.

V5. Kolme lukua muodostaa aritmeettisen jonon, jos ja vain jos yksi niistä on kahden muun keskiarvo. Voidaan olettaa, että jono on valmiiksi oikeassa järjestyksessä ja siis

$$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}.$$

Kertomalla tämä puolittain nimittäjien tulolla saadaan

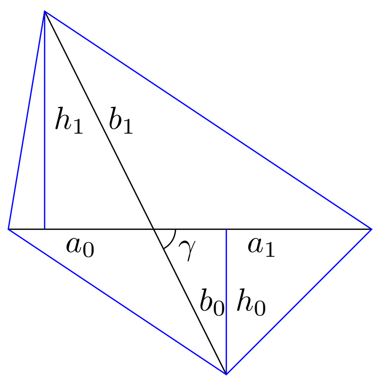
$$2(a+b)(b+c) = (a+c)(b+c) + (a+c)(a+b)$$

eli

$$2ab + 2ac + 2b^2 + 2bc = ab + ac + bc + c^2 + a^2 + ac + bc + ab.$$

Sievennyksen jälkeen jää vain $2b^2 = a^2 + c^2$. Siis b^2 on a^2:n ja c^2:n keskiarvo. [Tehtävä oli ylioppilastutkinnossa vuonna 1931.]

V6. Olkoot liikkuvien janojen pituudet a ja b sekä niiden välinen vakiokulma γ.



Janat jakautukoot leikatessaan osiin niin, että $a = a_0 + a_1$ ja $b = b_0 + b_1$ (ks. kuvaa). Lasketaan kärkipisteiden määräämän nelikulmion ala sen avulla, että jana, jonka pituus on a, jakaa nelikulmion kahdeksi kolmioksi. Olkoot h_0 ja h_1 kantaa a vastaan kohtisuorassa olevat korkeusjanat. Tällöin ala on

$$\frac{ah_0}{2} + \frac{ah_1}{2} = \frac{a(h_0 + h_1)}{2} = \frac{a(b_0 \sin\gamma + b_1 \sin\gamma)}{2} = \frac{ab \sin\gamma}{2},$$

ts. riippumaton siitä, missä pisteessä janat leikkaavat. $\square$

Avoin sarja

A1.

$$2017^{2017} - 2016^{2016} \equiv 7^{2017} - 6^{2016} \equiv 7^{2017} - 6 \pmod{10}.$$

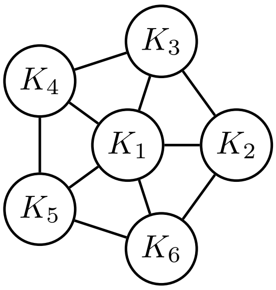
Luvun 7 potenssien jäännökset kymmenellä jaettaessa ovat 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7,.... Koska $2017 \equiv 1 \bmod 4$, on jakojäännös 7, joten

$$2017^{2017} - 2016^{2016} \equiv 7 - 6 = 1 \pmod{10}.$$

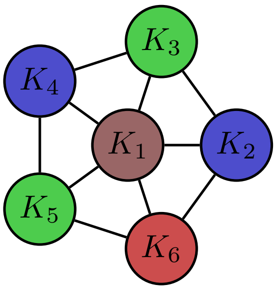
Vastaus: *Viimeinen numero on yksi.*

A2.

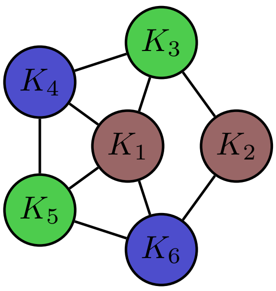
a) Piirretään tilanteesta verkko niin, että kurssit ovat solmuja ja kahden solmun välille piirretään särmä täsmälleen silloin, kun joku haluaa osallistua molempiin kokeista.



Jos kurssien välillä on särmä, niin niiden kokeet pitää järjestää eri koetilaisuudessa; verkkoteoreettisesti sanotaan, että ne pitää *värittää* eri väreillä. Solmulle K_1 tulee selvästi oma värinsä, ja koska muut solmut muodostavat parittoman syklin, niiden värittämiseen tarvitaan kolme väriä. Yksi mahdollinen väritys neljällä värillä on seuraava.

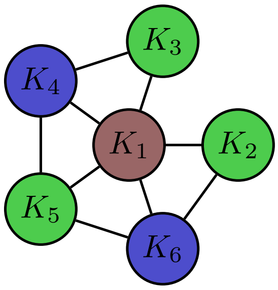


b) Peruuttava oppilas on joko joku oppilaista A–E tai joku oppilaista F–J. Symmetriasyistä riittää tarkastella niitä tapauksia, joissa A tai F peruuttaa. Jos A peruuttaa, kolme koetilaisuutta riittää.



Vähemmälläkään ei selvitä, koska jo 5-syklin värittämiseen tarvitaan kolme väriä.

Jos F peruuttaa, niin jälleen selvitään kolmella värillä.

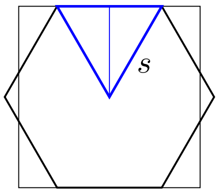


Tässä tapauksessa solmu K_1 vaatii oman värinsä, ja muiden värittäminen yhdellä värillä ei tietenkään onnistu.

Vastaus: *a) Tarvitaan neljä koetilaisuutta. b) Kolme koetilaisuutta riittää (ja tarvitaan) peruutuksen jälkeen.*

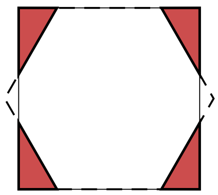
A3=V5.

A4. Olkoon säännöllisen kuusikulmion sivun pituus s. Säännöllinen kuusikulmio jakautuu kuudeksi tasasivuiseksi kolmioksi, joiden korkeudet ovat puolet neliön sivusta eli $\frac{1}{2}$.



Siis $\dfrac{\sqrt{3}}{2}s = \dfrac{1}{2}$, mistä $s = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Säännöllisten monikulmioiden leikkauksen ala saadaan poistamalla neliöstä neliön kärkiin jäävät suorakulmaista kolmiot.



Tällaisen kolmion lyhyemmän kateetin pituus saadaan luonnollisesti siitä, että kaksi tällaista kateettia ja kuusikulmion sivu yhdessä muodostavat neliön sivun. Siis tämän kateetin pituus on $(1-s)/2$. Lisäksi poistettavan suorakulmaisen kolmion kulmat voidaan päätellä siitä, että säännöllisen viisikulmion kulmien yhteinen suuruus on $(6-2)\cdot 180°/6 = \frac{2}{3}\cdot 180° = 120°$. Siis lyhyemmän kateetin ja hypotenuusan välinen kulma on

$180° - 120° = 60\circ$. Siten pidemmän kateetin pituus on $\sqrt{3}(1-s)/2$ ja poistettava ala

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}(1-s)}{2} \cdot \frac{1-s}{2} &= \frac{\sqrt{3}(1-1/\sqrt{3})^2}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1. \end{aligned}$$

Leikkauksen alaksi saadaan siis

$$1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \right) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Vastaus: *Yhteisen osan ala on* $2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.