31. 10. Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun ratkaisut 2016

Perussarjan monivalintatehtävät

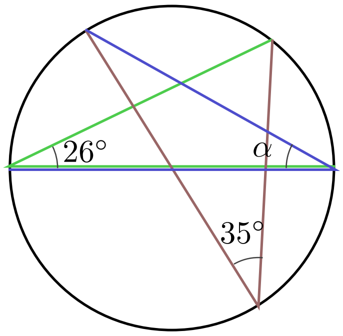
	a	b	c	d
1.	−	−	+	−
2.	−	+	−	−
3.	−	+	+	+
4.	−	+	+	−
5.	−	+	+	−
6.	+	−	−	+

P1. Kauppias ostakoon p kg paahtamatonta kahvia, jonka ostohinta olkoon b €/kg. Ostettaessa kahvi maksaa siis pb €. Koska kahvi paahdettaessa menettää painostaan 20 %, niin myytävän kahvin paino on $0{,}8p$ kg, ja kauppias saa siitä $0{,}8pa$ €. Jotta voittoa olisi 20 %, pitää olla voimassa yhtälö

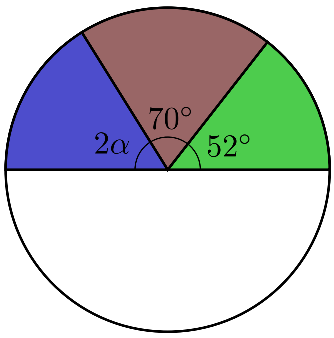
$$0{,}8pa = 1{,}2pb \text{ eli } b = \frac{0{,}8}{1{,}2}a = 2a/3.$$

Ostohinta oli siis $(1 - 2/3) \cdot 100\,\% = 100/3\,\% \approx 33\%$ pienempi kuin myyntihinta, joten vaihtoehto c on oikein ja muut väärin.

P2. Kuvio muodostuu itse asiassa ympyrän sisään piirretyistä kehäkulmista, joista α ja kaksi tunnettua on tässä merkitty väreillä kuvioon.



Kun näitä kehäkulmia vastaavista keskuskulmista piirretään kuvio, huomataan, että ympyrän ylempi puolisko koostuu vastaavista sektoreista.



Siis

$$2\alpha + 70^\circ + 52^\circ = 180^\circ \iff 2\alpha = 180^\circ - 70^\circ - 52^\circ = 58^\circ \iff \alpha = 29^\circ$$

Siis vaihtoehto b on oikein ja muut väärin.

P3. Lausekkeiden erotukselle saadaan

$$\begin{aligned} A - B &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - (a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2) \\ &= a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc = (ad-bc)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Siis $A \geq B$ kaikilla lukujen a, b, c ja d arvoilla eli vaihtoehto b on oikein. Kun $a = 12$, $b = 5$, $c = 8$ ja $d = 3$, niin $(ad-bc)^2 = (12\cdot 3 - 5\cdot 8)^2 = (36-40)^2 = (-4)^2 = 16 > 0$, joten $A > B$ ja vaihtoehto c on myös oikein. On kuitenkin mahdollista, että $(ad-bc)^2 = 0$, nimittäin esimerkiksi silloin, kun $a = b = c = d = 1 \neq 0$, joten vaihtoehto d on oikein ja a väärin.

P4. Merkitään $p = 40\,\text{cm}$ ja α:lla sektorin keskuskulmaa ja r:llä ympyrän sädettä. Tunnetusti sektorin ala on

$$A = \alpha r^2/2,$$

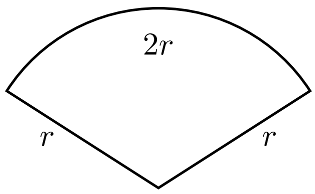
mutta toisaalta sektorin piirille pätee

$$p = \alpha r + 2r \iff \alpha r = p - 2r,$$

joten toinen tuntemattomista α ja r voidaan eliminoida pinta-alan lausekkeesta:

$$A = \frac{\alpha r \cdot r}{2} = \frac{(p-2r)r}{2} = pr/2 - r^2.$$

Pinta-ala A on siis säteen r toiseen asteen funktio, ja koska toisen asteen kerroin -1 on negatiivinen, sillä on suurin arvo, joka saavutetaan nollakohtien $r = 0$ ja $r = p/2$ puolivälissä eli arvolla $r = p/4$. Tällöin $r = p/4 = 10\,\text{cm}$ (vaihtoehto c on oikein), $\alpha r = p - 2r = 4r - 2r = 2r$ (vaihtoehto b on oikein ja a väärin) ja $\alpha r = 2r \Rightarrow \alpha = 2$. Viimeisessä yhtälössä kulmamitta on tietenkin radiaaneissa ja suora kulma on $\pi/2 \neq 2$, joten vaihtoehto d on myös väärin. (Kuvassa tilanteen mukainen sektori mittakaavassa 1:5.)



P5. Tehtävän lauseke supistuu muotoon

$$P = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2015}\right)\left(1+\frac{1}{2016}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2017}{2016} = \frac{2017}{2} = 1008,5.$$

Vastaus ei siis ole kokonaisluku, joten a ja d ovat väärin, mutta $1000 < P < 2016$, joten b ja c ovat oikein.

P6. Kertoimien summa on

$$a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0 = a_5\cdot 1^5+a_4\cdot 1^4+a_3\cdot 1^3+a_2\cdot 1^2+a_1\cdot 1+a_0 = P(1) = (2\cdot 1+1)^5 = 3^5 = 243$$

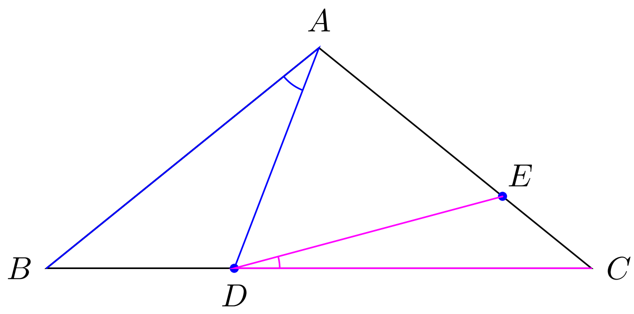
on selvästi kolmella, mutta ei viidellä jaollinen (vaihtoehto a oikein, mutta c väärin). Binomikaavasta saadaan

$$P(x) = (2x+1)^5 = (2x)^5 + \binom{5}{4}(2x)^4 + \binom{5}{3}(2x)^3 + \binom{5}{2}(2x)^2 + \binom{5}{1}2x + 1$$

eli esimerkiksi ensimmäisen asteen termin kerroin $\binom{5}{1} \cdot 2 = 10$ on viidellä jaollinen (vaihtoehto d oikein). Koska binomikertoimet $\binom{5}{k}$ ja kakkosen potenssit 2^k eivät ole kolmella jaollisia, niin mikään kertoimista ei ole kolmella jaollinen (b väärin).

Perussarjan perinteiset tehtävät

P7. Piirretään kuvio tilanteesta. Kuvassa $\sphericalangle BAD = 30^\circ$ on tunnettu (sinisellä) ja määritettävä $\sphericalangle EDC$ on sinipunaisella.



Merkitään kantakulmia $\alpha = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$, jolloin $\sphericalangle DAC = 180^\circ - 2\alpha - 30^\circ = 150^\circ - 2\alpha$. Kolmio ADE on tehtävänannon mukaan myös tasakylkinen, ja $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAE$ on sen huippukulma. Tämän tasakylkisen kolmion kantakulmalle saadaan

$$\sphericalangle DEA = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DAE) = \frac{1}{2}(180^\circ - (150^\circ - 2\alpha)) = \frac{1}{2}(30^\circ + 2\alpha) = 15^\circ + \alpha.$$

Siis $\sphericalangle DEC = 180^\circ - (15^\circ + \alpha) = 165^\circ - \alpha$. Lopuksi saadaan

$$\sphericalangle EDC = 180^\circ - \sphericalangle DCE - \sphericalangle DEC = 180^\circ - \alpha - (165^\circ - \alpha) = 15^\circ.$$

Vastaus: *Kulma EDC on 15°.*

P8. Merkitään $t = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, jolloin yhtälö muuntuu muotoon

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2 + 4x - 2x^2} + \sqrt{6 + 6x - 3x^2} = x^2 - 2x + 6 \\
\iff &\sqrt{4 - 2(x-1)^2} + \sqrt{9 - 3(x-1)^2} = (x-1)^2 + 5 \\
\iff &\sqrt{4 - 2t} + \sqrt{9 - 3t} = t + 5.
\end{aligned}$$

Toisaalta koska $t \geq 0$, niin

$$\sqrt{4 - 2t} + \sqrt{9 - 3t} \leq \sqrt{4} + \sqrt{9} \leq 2 + 3 = 5 \leq t + 5,$$

kunhan neliöjuurilausekkeet ovat määriteltyjä eli $t \leq 2$. Yhtälö ei siis voi olla voimassa muuten, kuin että yo. kaksoisepäyhtälössä molemmat vertailut ovat yhtäsuuruuksia, mikä toteutuu täsmälleen silloin, kun $t = 0$. Siis $t = (x-1)^2 = 0$ eli $x = 1$, jolloin selvästi yhtälö toteutuu.

Vastaus: *Yhtälön ainoa ratkaisu on $x = 1$.*

Välisarjan monivalintatehtävät

	a	b	c	d
1.	−	+	+	−
2.	−	−	−	+
3.	+	+	+	+

V1=P4.

V2. Polynomien vakiotermejä tarkastelemalla havaitaan, että $Q(0) = 0$ ja $P(0) = -2$ riippumatta parametrin a arvosta. Jos $Q(x)$ jakaisi $P(x)$:n, niin pätisi kuitenkin $P(0) = S(0)Q(0) = 0$ (jollakin polynomilla $S(x)$). Siis $P(x)$ ei voi olla jaollinen $Q(x)$:llä millään $a \in \mathbb{Z}$ eli vain vaihtoehto d on oikein, muut vääriä.

V3. Tarkastellaan Diofantoksen yhtälöä

$$x^2 + 5y^4 = 2016.$$

Jos $|x| \geq 50$, niin $x^2 + 5y^4 \geq (50)^2 + 5 \cdot 0 = 2500 > 2016$, joten kaikille ratkaisuille pätee $|x| < 50$. Jos $|y| \geq 5$, niin $x^5 + 5y^4 \geq 5y^4 \geq 5 \cdot 5^4 = 5^5 = 3125 > 2016$, joten kaikille ratkaisuille pätee myös $|y| < 5$. Siis vaihtoehto b pätee.

Yhtälöstä seuraa

$$x^2 \equiv x^2 + 5y^4 = 2016 = 5 \cdot 403 + 1 \equiv \pmod 5,$$

joten $x \equiv \pm 1 \pmod 5$. Siis $x + 1$ tai $x - 1$ on viidellä jaollinen eli vaihtoehto c pätee.

Koska vaihtoehto c on voimassa, niin x ei ole viidellä jaollinen ja $x \neq 0$. Toisaalta 2016 ei ole kokonaisluvun neliökään (toistuvasti lukua puolittamalla havaitaan, että $2016 = 32 \cdot 63 = 2^5 \cdot 63$ eli kakkosen parittoman potenssin ja parittoman luvun tulo), joten $y \neq 0$. Siis vaihtoehto d on voimassa.

Jos tarkasteltavalla yhtälöllä on ratkaisu, niin sillä on ratkaisu, jossa x ja y ovat positiivisia. Ehdon b nojalla riittää käydä läpi y:n arvot 1, 2, 3 ja 4, ja seulomalla löytyy ratkaisu $x = 44$ ja $y = 2$ ($44^2 + 5 \cdot 2^4 = 1936 + 80 = 2016$), joten kohta a on oikein. Kaikki kohdat siis pätevät.

Välisarjan perinteiset tehtävät

V4=P7.

V5.

a) Kiinnitetään pariskunnista yksi, henkilöt AA ja BB. He joutuvat eri ryhmiin, nimetään AA:n ryhmä A:ksi ja BB:n B:ksi. Kunkin muun pariskunnan kohdalla pitää valita, kumpi joutuu ryhmään A ja kumpi ryhmään B; valinnan voi tehdä kahdella eri tavalla kunkin viiden muun pariskunnan kohdalla. Eri tapoja jakaa pariskunnat kuuden hengen ryhmiin on siis $2^5 = 32$ kappaletta.

b) Sovitaan taas, että AA:n ryhmä on A ja BB:n B. Lisäksi on olemassa ryhmä C, johon kumpikaan AA:sta ja BB:stä ei pääse. Viidestä jäljelle jäävästä parista valitaan ensin toinen pariskunta, josta kumpikaan ei ole pääse ryhmään C; tämä valinta voidaan tehdä 5 tavalla. Lisäksi tämän pariskunnan kohdalla päätetään, kumpi joutuu ryhmään A ja kumpi ryhmään B (2 tapaa). Lopuista neljästä pariskunnasta sijoitetaan ensin toinen ryhmään C, mikä voidaan tehdä $2^4 = 16$ tavalla. Vielä on täytettävän kaksi paikkaa ryhmään A ja ryhmään B. Tämä vastaa kahden hengen valitsemista neljästä, minkä voi tehdä $\binom{4}{2} = 6$ tavalla. Kaikkiaan tapoja muodostaa ryhmät on

$$5 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 6 = 960.$$

Vastaus: *Ryhmät voidaan muodostaa a) 32 b) 960 tavalla.*

V6. Lausekkeen $p = x^4 + 4y^4$ voi jakaa tekijöihin huomaamalla, että sen voi täydentää summan ja erotuksen tuloksi. Siis

$$p = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + y^2).$$

Luvut p, $x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 = (x + y)^2 + y^2$ ja $x^2 - 2xy + 2y^2 = (x - y)^2 + y^2$ ovat kaikki selvästi epänegatiivisia ja itse asiassa positiivisia, koska p on alkuluku. Toisaalta jotta p olisi alkuluku, täytyy tämän löydetyn tekijöihinjaon trivialisoitua niin, että

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 = p \\ x^2 - 2xy + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Jälkimmäinen yhtälö merkitsee, että $(x - y)^2 + y^2 = x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$, mikä voi toteutua vain, kun $x = y = 1$. Toisaalta $5 = 1^4 + 4 \cdot 14$ on alkuluku.

Vastaus: 5 *on ainoa haluttua muotoa oleva alkuluku.*

Avoin sarja

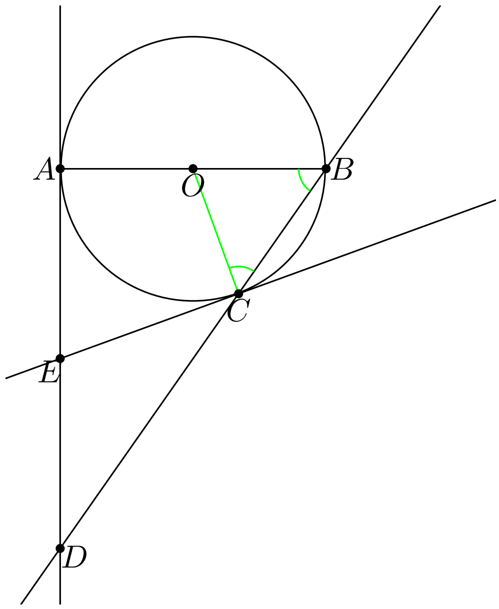
A1. Kymmenen kertoman voi kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} 10! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 7m^2, \end{aligned}$$

missä $m = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$. Siis 7 on luku, jolle $10!/7$ on neliöluku. Pienempää tällaista positiivista kokonaislukua ei ole, koska 7 on alkuluku ja $7 \nmid 720$. Siis $k = 7$ ja $m = 720$ ovat kysytyt luvut.

Vastaus: $k = 7$ *ja* $m = 720$.

A2. Ympyrän keskipiste olkoon O. Pisteen C kautta piirretty tangentti leikatkoon janan AD pisteessä E.



Merkitään $\alpha = \sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC$. Tällöin $\sphericalangle ECD = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Myös $\sphericalangle ADB = 90° - \alpha$. Siis kolmio CDE on tasakylkinen, joten $|ED| = |EC|$. Tangenttikulman kylkinä myös $|EA| = |EC|$, joten $|AE| = |ED|$ eli E puolittaa janan AD. $\square$

A3. Sijoittamalla $y = z$ epäyhtälö supistuu muotoon

$$f(xy) - f(x)f(y^2) \geq \frac{1}{4},$$

kun $x, y \in \mathbb{R}$. Erityisesti kun t on yhtälön $t^2 = t$ ratkaisu eli $t = 0$ tai $t = 1$, saadaan

$$f(t^2) - f(t)f(t^2) \geq \frac{1}{4}$$

eli

$$f(t) - f(t)^2 \geq \frac{1}{4} \iff 0 \geq \frac{1}{4} - f(t) + f(t)^2 = (\frac{1}{2} - f(t))^2,$$

mikä on tietenkin mahdollista vain, jos $f(t) = \frac{1}{2}$. Siis $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$. Sijoittamalla nyt ylinpään johdettuun epäyhtälöön vuoroin $y = 0$, vuoroin $y = 1$ päädytään seuraaviin epäyhtälöihin, jotka ovat voimassa kaikilla $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} f(0) - f(x)f(0) \geq \dfrac{1}{4} \\ f(x) - f(x)f(1) \geq \dfrac{1}{4} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \dfrac{1}{2} - f(x) \cdot \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{4} \\ f(x) - f(x) \cdot \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{4} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 1 - f(x) \geq \dfrac{1}{2} \\ 2f(x) - f(x) \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \dfrac{1}{2} \geq f(x) \\ f(x) \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \\
\iff & f(x) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Rutiinitarkastus osoittaa, että vakiofunktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}$ on todella ratkaisu:

$$\frac{1/2 + 1/2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}.$$

Vastaus: *Vakiofunktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}$ on todella ratkaisu.*

A4. Valitaan luvuksi α kultainen leikkaus $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, joten α toteuttaa yhtälön $\alpha^2 = \alpha + 1$. Osoitetaan induktiolla summan $m + n$ suhteen, että kun $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > 0$, niin jos $m > \alpha n$, niin Ainolla on voittostrategia pelissä $\mathrm{SYT}(m, n)$, muuten Väinöllä on voittostrategia tässä pelissä.

1) Jos $n \mid m$, niin Aino voi ensimmäisellä siirrollaan tyhjentää kasan, jossa on m kiveä, joten Aino voittaa. Tämä tapaus sisältää induktion aloitusaskeleen $m + n = 3$, jolloin $m = 2$ ja $n = 1$. Huomataan lisäksi, että $m \geq 2n \geq \alpha n$.
2) Oletetaan, että $n < m < \alpha n$. Pelin sääntöjen mukaan Ainon on pakko ottaa kivet suuremmasta kasasta eli siitä, jossa on m kiveä. Koska $m < 2n$, niin hänellä ei ole vaihtoehtoja: kiviä on noukittava n kappaletta. Peli siis jatkuu tilanteesta, jossa kasoissa on n ja $m - n$ kiveä, ja vuoro on Väinöllä. Tässä $0 < m - n < n$ ja

$$\frac{n}{m - n} > \frac{n}{\alpha n - n} = \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha - 1} = \alpha.$$

Induktio-oletuksen mukaan Ainolla on voittostrategia pelissä $\mathrm{SYT}(n, m-n)$, mutta tässä pelissä Aino aloittaa ja nyt Väinö onkin vuorossa. Siis Väinö voi kopioida Ainon voittostrategiaa, jolla hän voittaa pelin.

3) Oletetaan, että $m \geq \alpha n$, mutta $n \nmid m$. Koska α on irrationaalinen, niin itse asiassa $m > \alpha n$. Merkitään $\beta = m/n - \lfloor m/n \rfloor$ ja $k = \lfloor m/n \rfloor$. Tällöin $m = kn + \beta n$, missä $0 < \beta < 1$, sillä $n \nmid m$. Jos $1 + \beta < \alpha$ (huomaa, että $\beta \in \mathbb{Q}$ ja $\alpha \notin \mathbb{Q}$), niin $k \geq 2$, koska $m > \alpha n$, joten Aino voi poistaa m kiven kasasta $(k-1)n$ kiveä, jolloin jäljelle jää $m - (k-1)n = (1+\beta)n$ kiveä. Induktio-oletuksen mukaan Väinöllä on voittostrategia pelissä $\mathrm{SYT}((1+\beta)n, n)$, jota Aino voi kopioida voittaakseen pelin. Jos taas $1 + \beta > \alpha$, niin Ainon kannattaa ottaa suuremmasta kasasta kn kiveä, jolloin jäljelle jää βn kiveä ja riittää varmistaa, että pelissä $\mathrm{SYT}(n, \beta n)$ Väinöllä on voittostrategia. Tämä pätee induktio-oletuksen ja sen tähden, että

$$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha. \quad \square$$