Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun perussarja

31. 10. 2016

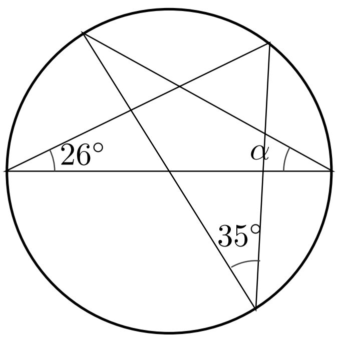
Tehtäviä on kahdella sivulla; kuusi ensimmäistä tehtävää on monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta. **Laskimet eivät ole sallittuja.**

1. Kauppias on ostanut erän paahtamatonta kahvia, jonka hän paahtaa ja myy sitten paahdettuna hintaan a euroa kilogrammalta. Kahvi menettää paahdettaessa painostaan 20 % ja kauppias ottaa voittoa 20 %? Tällöin kauppiaan ostohinta (€/kg) oli prosenttiyksikön tarkkuudella

a) 20 %	b) 25 %	c) 33 %	d) 40 %

pienempi kuin myyntihinta.

2. Kuvaan on piirretty ympyrän sisälle muutamia kehäkulmia.



Päättele kulman α suuruus.

a) 23°	b) 29°	c) 34°	d) 35°

3. Tarkastellaan lausekkeita $A = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ ja $B = (ac + bd)^2$. Tällöin

a) $A > B$ kaikilla reaalilukujen a, b, c ja d arvoilla.
b) $A \geq B$ kaikilla reaalilukujen a, b, c ja d arvoilla.
c) $A > B$, kun $a = 12$, $b = 5$, $c = 8$ ja $d = 3$.
d) on olemassa nollasta eroavia reaalilukuja a, b, c ja d, joilla $A = B$.

4. Ympyränsektorin piiri on 40 cm ja oletetaan, että sen ala on tällaisista sektoreista suurin mahdollinen. Tällöin:

a) Sektorin kaaren ja ympyrän säteen pituus on sama.
b) Sektorin kaari on kaksi kertaa niin pitkä kuin ympyrän säde.
c) Ympyrän säde on 10 cm.
d) Sektorin keskuskulma on 90°.

5. Olkoon

$$P = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2015}\right)\left(1 + \frac{1}{2016}\right).$$

Silloin

a) P on kokonaisluku	b) $P > 1000$
c) $P < 2016$	d) $P = 3110$

6. Kirjoitetaan polynomi $P(x) = (2x+1)^5$ lavennetussa muodossa $P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Mitkä polynomin $P(x)$ kertoimia koskevista väitteistä ovat tosia?

a) Kertoimien summa $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ on kolmella jaollinen.
b) Ainakin yksi kertoimista (a_0, $a_1, \ldots$ tai a_5) on kolmella jaollinen.
c) Kertoimien summa on viidellä jaollinen.
d) Ainakin yksi kertoimista on viidellä jaollinen.

7. Kolmio ABC on tasakylkinen ja $\sphericalangle BAC > 30^\circ$. Piste D sijaitsee kannalla BC ja piste E kyljellä AC. Oletetaan, että $\sphericalangle BAD = 30^\circ$ ja $|AD| = |AE|$. Määritä kulma EDC.

8. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{2 + 4x - 2x^2} + \sqrt{6 + 6x - 3x^2} = x^2 - 2x + 6.$$

Perussarjan monivalinnan vastauslomake

31. 10. 2016

Perussarjan monivalintatehtävien (6 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 7 ja 8 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 7 ja 8 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. Kirjoita myös tehtävien 7 ja 8 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

31. 10. 2016

1. Ympyränsektorin piiri on 40 cm ja oletetaan, että sen ala on tällaisista sektoreista suurin mahdollinen. Tällöin:

a) Sektorin kaaren ja ympyrän säteen pituus on sama.
b) Sektorin kaari on kaksi kertaa niin pitkä kuin ympyrän säde.
c) Ympyrän säde on 10 cm.
d) Sektorin keskuskulma on 90°.

2. Millä vakion $a \in \mathbb{Z}$ arvolla polynomi $P(x) = x^{2016} - x^{1000} + 800x^{15} + ax^7 - 2$ on jaollinen polynomilla $Q(x) = x^{312} - 41x^{192} + 5x^8 - x$?

a) $a = -1$ b) $a = 1$ c) kaikilla $a \in \mathbb{Z}$ d) ei millään $a \in \mathbb{Z}$

3. Mitä voidaan sanoa Diofantoksen yhtälön

$$x^2 + 5y^4 = 2016$$

kokonaislukuratkaisuista?

a) Niitä on olemassa.
b) Kaikille ratkaisuille pätee $|x| < 50$ ja $|y| < 5$.
c) $x + 1$ tai $x - 1$ on viidellä jaollinen.
d) $x \neq 0$ ja $y \neq 0$.

4. Kolmio ABC on tasakylkinen ja $\sphericalangle BAC > 30°$. Piste D sijaitsee kannalla BC ja piste E kyljellä AC. Oletetaan, että $\sphericalangle BAD = 30°$ ja $|AD| = |AE|$. Määritä kulma EDC.

5. Kuusi pariskuntaa jaetaan ryhmiin siten, että yksikään pari ei saa joutua samaan ryhmään.

a) Kuinka monella tavalla heidät voidaan jakaa kahteen kuuden hengen ryhmään?
b) Entä kolmeen neljän hengen ryhmään?

6. Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut x ja y, joille luku $x^4 + 4y^4$ on alkuluku.

Välisarjan monivalinnan vastauslomake

31. 10. 2016

Välisarjan monivalintatehtävien (3 ensimmäistä tehtävää) vastaukset palautetaan tällä lomakkeella; perinteisten tehtävien 4–6 ratkaisut voi kirjoittaa erillisille vastausarkeille. Kussakin monivalintatehtävässä voi olla 0–4 oikeata vastausta. Merkitse vastaavaan ruutuun +, jos vastaus on oikea, ja −, jos vastaus on väärä. Oikeasta merkinnästä saa pisteen, väärästä tai tulkinnanvaraisesta merkinnästä saa nolla pistettä. Tehtävistä 4–6 maksimipistemäärä on 6.

Työaikaa on 120 minuuttia. **Laskimet eivät ole sallittuja.** *Kirjoita myös tehtävien 4–6 vastauspapereihin selvästi tekstaten oma nimesi ja koulusi.*

Nimi : ______________________________

Koulu : ______________________________

Kotiosoite : ______________________________

Sähköposti : ______________________________

	a	b	c	d
1.				
2.				
3.				

Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

31. 10. 2016

1. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku k, jolle luku $10!/k$ on neliöluku eli jonkin kokonaisluvun m toinen potenssi. Määritä tämä kokonaisluku m. (Positiivisen kokonaisluvun n *kertoma* $n!$ on tulo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.)

2. Ympyrän halkaisijan AB toisen päätepisteen A kautta piirretään ympyrälle tangentti ja pisteen B kautta jänne BC, jonka jatke leikkaa tangentin pisteessä D. Osoita, että C:n kautta piirretty ympyrän tangentti puolittaa janan AD.

3. Määritä kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat epäyhtälön

$$\frac{f(xy) + f(xz)}{2} - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4},$$

kun $x, y, z \in \mathbb{R}$.

4. Aino ja Väino pelaavat peliä $\mathrm{SYT}(m, n)$, missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. Pelin alkaessa pöydällä on kaksi kivikasaa, joista toisessa on m, toisessa n kiveä. Vuorossa oleva pelaaja saa poistaa jommastakummasta kasasta minkä tahansa kivimäärän, joka on toisen kasan kivien lukumäärän positiivinen monikerta. Pelaajat poistavat kiviä vuorotellen niin, että Aino aloittaa. Se, joka pystyy tyhjentämään toisen kasoista, voittaa. Todista, että on olemassa sellainen $\alpha > 1$, että aina kun $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \geq \alpha n > 0$, niin Ainolla on voittostrategia pelissä $\mathrm{SYT}(m, n)$.

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Laskimet eivät ole sallittuja.
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).