Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu 31.1.2014

Tehtävien ratkaisuehdotuksia

1. *Laske lausekkeen*

$$x^2 + y^2 + z^2$$

arvo, kun

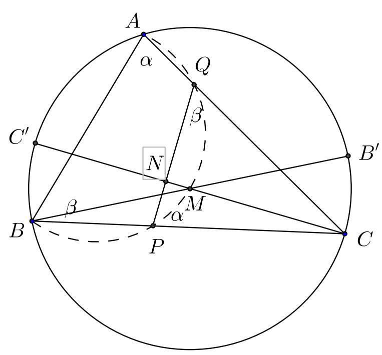
$$x + y + z = 13, \quad xyz = 72 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}.$$

Ratkaisu. Tehtävässä annettujen tietojen perusteella

$$169 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = x^2 + y^2 + z^2 + 144 \cdot \frac{3}{4} = x^2 + y^2 + z^2 + 96,$$

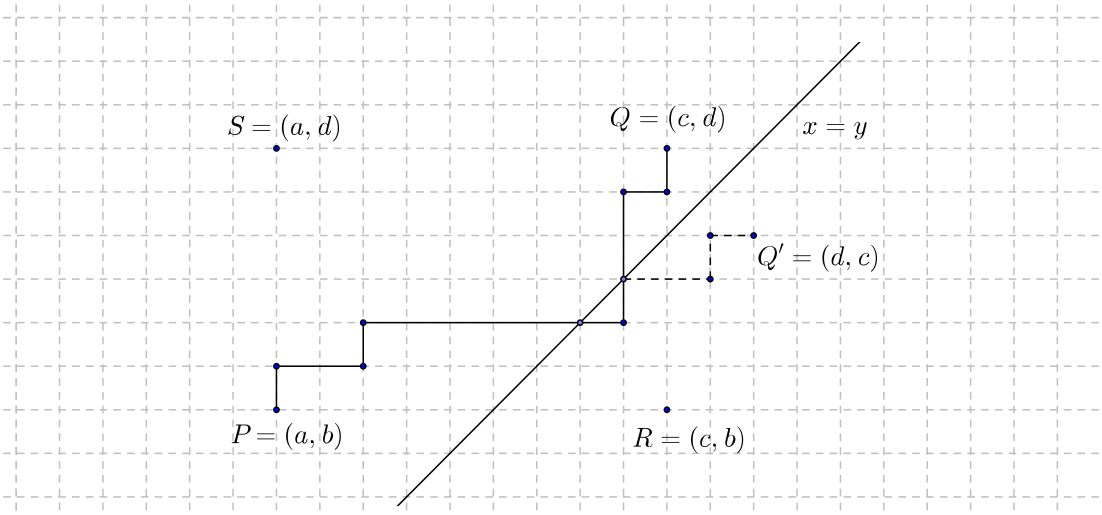
joten $x^2 + y^2 + z^2 = 169 - 108 = 61$.

2. *Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on M ja pisteiden A, B ja M kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivut BC ja AC pisteissä P ja Q. Osoita, että janan CM jatke leikkaa kohtisuorasti janaa PQ.*



Ratkaisu. Olkoot B' ja C' pisteistä B ja C piirrettyjen ympyrän halkaisijoiden toiset pätepisteet ja N QP:n ja CC':n leikkauspiste. Väite on todistettu, jos voidaan osoittaa, että $\angle CNP = \angle CNQ$. Tämä on tilanne, jos $\angle NPC + \angle PCN = \angle NQC + \angle NCQ$. Koska tehtävän oletusten mukaan $ABPQ$ on ympyrän sisään piirretty nelikulmio eli jännenelikulmio, ja jännenelikulmion vastakkaiset kulmat ovat toistensa suplementtikulmia, niin $\angle NPC = \angle QPC = \angle BAQ = \angle BAC$. Kehäkulmia $\angle BAC$ ja $\angle C'CB = \angle NCP$ vastaavien kaarien summa on kaari $\overparen{C'BC}$ eli puoliympyrän kaari. Aivan samoin nähdään, että kehäkulmia $\angle ABC$ ja $\angle C'CA = \angle NCQ$ vastaavien kaarien summa on kaari $\overparen{CAC'}$, joka myös on puoliympyrän kaari. Mutta tästä seuraa $\angle NPC + \angle PCN = \angle NQC + \angle NCQ$ eli väite.

3. *Pisteet $P = (a, b)$ ja $Q = (c, d)$ ovat xy-tason ensimmäisessä neljänneksessä sekä a, b, c ja d ovat kokonaislukuja, joille $a < b$, $a < c$, $b < d$ ja $c < d$. Reitti pisteestä P pisteeseen Q on positiivisten koordinaattiakselien suuntaisista, yksikön pituisista askelista muodostuva murtoviiva, ja* sallittu reitti *on reitti, joka ei leikkaa eikä kosketa suoraa $x = y$. Montako sallittua reittiä on?*



Olkoon $R = (c, b)$ ja $S = (a, d)$. Kaikki reitit P:stä Q:hun ovat suorakaiteen $PRQS$ sisällä. Jos jätetän huomiotta suoraa $x = y$ koskeva ehto, niin reitissä on $n = c-a+(d-b)$ askelta ja näistä tasan $k = d - b$ otetaan positiivisen y-akselin suuntaan ("ylöspäin"). Ylöspäin suuntautuneiden askelien sijoittuminen reitille määrittää sen yksikäsitteisesti. Reittejä on siis yhtä monta kuin n-alkioisella joukolla on k-alkioisia osajoukkoja, eli

$$\binom{n}{k} = \binom{c-a+d-b}{d-b}$$

kappaletta. Jos $c < b$, niin $PRQS$ on kokonaan suoran $x = y$ yläpuolella, ja kaikki reitit ovat sallittuja reittejä. Oletetaan sitten, että $b \leq c$. Jokaiseen ei-sallittuun eli *kiellettyyn* reittiin kuuluu silloin yksi tai useampi suoran $x = y$ piste eli piste (t, t). Olkoon $X = (t, t)$ se näistä, joissa t on suurin. Peilataan nyt ei-sallitun reitin osuus X:stä Q:hun suoran $y = x$ suhteen. Kun reitin alkuosa jätetään muuttamatta, saadaan reitti P:stä pisteeseen $Q' = (d, c)$. Koska P ja Q' ovat eri puolilla suoraa $x = y$, jokainen reitti P:stä Q':uun saadaan tekemällä edelllä kuvattu muunnos johonkin kiellettyyn reittiin P:stä Q:hun. Kielletyt reitit ja reitit P:stä Q':uun vastaavat yksikäsitteisesti toisiaan. Olkoon $n' = d - a + c - b$ P:stä Q:hun kulkevan reitin pituus ja $k' = c - b$ näissä reiteissä olevien ylöspäin tehtävien askelien määrä. Kiellettyjä reittejä on siis $\binom{n'}{k'}$ ja sallittuja reittejä

$$\binom{n}{k} - \binom{n'}{k'} = \binom{c-a+d-b}{d-b} - \binom{d-a+c-b}{c-b}$$

kappaletta.

4. *Ympyrän säde r on pariton kokonaisluku. Ympyrällä on piste (p^m, q^n), missä p ja q ovat alkulukuja sekä m ja n positiivisia kokonaislukuja. Lisäksi ympyrä on origokeskinen. Määritä säde r.*

Ratkaisu. Koska piste $(p^m,\ q^n)$ on ympyrällä $x^2 + y^2 = r^2$, niin

$$p^{2m} + q^{2n} = r^2. \tag{1}$$

Koska r on pariton, tasan toisen luvuista p ja q on oltava parillinen. Oletetaan ensin, että p on parillinen ja q pariton. Silloin $p = 2$ ja yhtälöstä (1) saadaan

$$2^{2m} = r^2 - (q^n)^2 = (r + q^n)(r - q^n).$$

Oikean puolen tulon molemmat tekijät ovat kakkosen potensseja, siis

$$\begin{cases} r + q^n = 2^u, \\ r - q^n = 2^v, \end{cases} \tag{2}$$

missä $u > v$ ja $u+v = 2m$. Kun yhtälöt (2) vähennetään toisistaan, saadaan $2q^n = 2^u - 2^v$. Tämä on mahdollista vain, jos $v \geq 1$. Silloin $q^n = 2^{u-1} - 2^{v-1}$. Koska q on pariton, on oltava $v = 1$ ja siis $u = 2m - 1$. Siis $q^n = 2^{2m-2} - 1 = (2^{m-1} + 1)(2^{2m-1})$. Kahdella peräkkäisellä parittomalla luvulla ei ole yhteisiä tekijöitä. Edellisen yhtälön mukainen q^n:n tekijöihin jako on mahdollinen vain, jos $2^{m-1} - 1 = 1$ eli $m = 2$. Silloin $q^n = 2^{2\cdot 2-2} - 1 = 3$. Tämä on mahdollista vain, kun $n = 1$. Siis $q = 3$ ja $r^2 = 2^4 + 3^2 = 25$ ja $r = 5$. – Jos q on parillinen, niin $q = 2$ ja edellinen ratkaisu voidaan toistaa vaihtamalla p ja q sekä m ja n keskenään. Tulos on edelleen $r = 5$.

2. ratkaisu. Päätellään, samoin kuin edellä, että toinen luvuista p tai q, esimerkiksi p, on 2. Silloin $4^m + q^{2n} = r^2$. Jos luku ei ole jaollinen kolmella, sen neliö on $\equiv 1 \bmod 3$. Näin ollen $4^m + q^{2n}$ on joko $\equiv 1$ tai $\equiv 2$ sen mukaan, onko q jaollinen kolmella vai ei. Toisaalta $r^2 \equiv 1$. Siis q on kolmella jaollinen ja koska q on alkuluku, on oltava $q = 3$. Yhtälö on siis $(2^m)^2 + (3^n)^2 = r^2$. Luvut 2^m, 3^n, r muodostavat erään *Pythagoraan lukukolmikon.*. Tunnetusti tällöin on olemassa keskenään yhteistekijättömät luvut k, ℓ siten, että $2^m = 2k\ell$, $3^n = k^2 - \ell^2$ ja $r = k^2 + \ell^2$. Tämä on mahdollista vain, jos (esimerkiksi) $\ell = 1$, $k = 2^{m-1}$ ja $3^n = (2^{m-1} - 1)(2^{m-1} + 1)$. Edellinen yhtälö voi toteutua vain, jos $2^{m-1} - 1 = 1$ eli $m = 2$, $k = 2$ ja $r = 2^2 + 1 = 5$.

5. *Määritä pienin luku $n \in \mathbb{Z}_+$, joka voidaan esittää muodossa $n = \sum_{a\in A} a^2$, missä A on äärellinen joukko positiivisia kokonaislukuja ja $\sum_{a\in A} a = 2014$. Toisin sanoen: Mikä on pienin positiivinen kokonaisluku, joka voidaan esittää summana eri positiivisten kokonaislukujen neliöistä, missä kokonaisluvut summautuvat luvuksi 2014?*

Ratkaisu. Jos positiivisille luvuille a, b, c pätee $a = b+c$, niin $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc > b^2 + c^2$. Sellaisen joukon, joka minimoi tehtävän neliösumman, pienin luku on siis 1 tai 2. Jos $a + 2 < b$, niin $a + 1 < b - 1$; $(a+1)^2 + (b-1)^2 = a^2 + b^2 + 2(a-b) + 2 < a^2 + b^2$. Kun neliösumman minimoivan joukon luvut asetetaan suuruusjärjestykseen, on jokaisen kahden peräkkäisen luvun erotus on enintään 2, eikä jonossa voi olla kahta sellaista kohtaa, jossa kahden peräkkäisen luvun erotus on 2. Nyt

$$\sum_{k=1}^{63} k = 32 \cdot 63 = 2016.$$

Ainoa joukko, joka täyttää edellä esitetyt miniminelíösummakriteerit ja jonka alkioiden summa on 2014, on $A = \{1, 3, 4, \ldots, 63\}$. Tunnetun kaavan

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

perusteella

$$\sum_{a \in A} a = \frac{63 \cdot 64 \cdot 127}{6} - 2^2 = 85340.$$