31. 1.

Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu

2014

1. Laske lausekkeen

$$x^2 + y^2 + z^2$$

arvo, kun

$$x + y + z = 13, \quad xyz = 72 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}.$$

2. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on M ja pisteiden A, B ja M kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivut BC ja AC pisteissä P ja Q. Osoita, että janan CM jatke leikkaa kohtisuorasti janaa PQ.

3. Pisteet $P = (a, b)$ ja $Q = (c, d)$ ovat xy-tason ensimmäisessä neljänneksessä sekä a, b, c ja d ovat kokonaislukuja, joille $a < b$, $a < c$, $b < d$ ja $c < d$. *Reitti* pisteestä P pisteeseen Q on positiivisten koordinaattiakselien suuntaisista, yksikön pituisista askelista muodostuva murtoviiva, ja *sallittu reitti* on reitti, joka ei leikkaa eikä kosketa suoraa $x = y$. Montako sallittua reittiä on?

4. Ympyrän säde r on pariton kokonaisluku. Ympyrällä on piste (p^m, q^n), missä p ja q ovat alkulukuja sekä m ja n positiivisia kokonaislukuja. Lisäksi ympyrä on origokeskinen. Määritä säde r.

5. Määritä pienin luku $n \in \mathbb{Z}_+$, joka voidaan esittää muodossa $n = \sum_{a \in A} a^2$, missä A on äärellinen joukko positiivisia kokonaislukuja ja $\sum_{a \in A} a = 2014$. Toisin sanoen: Mikä on pienin positiivinen kokonaisluku, joka voidaan esittää summana eri positiivisten kokonaislukujen neliöistä, missä kokonaisluvut summautuvat luvuksi 2014?

Kilpailuaikaa on **3 tuntia.**
Vain kirjoitus- ja piirustusvälineiden käyttö on sallittu.
Tee kukin tehtävä omalle, nimelläsi varustetulle paperilleen.
Merkitse yhteen papereista selvästi myös
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).