Lukion matematiikkakilpailu 1.2.2013

Tehtävien ratkaisuhahmotelmia

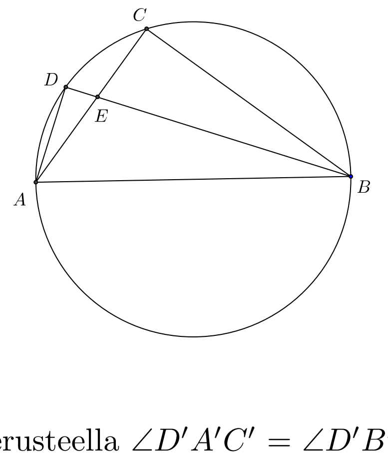
1. Olkoon $g(x) = f(x) - x^3 = ax^2 + bx + c$. Tiedetään, että $g(a) = g(b) = 0$. Siis $g(x) = a(x-a)(x-b)$. Kokonaisluvut a, b ja c toteuttavat yhtälöt $b = -a(a+b)$ ja $c = a^2b$. Edellisestä yhtälöstä seuraa

$$b = -\frac{a^2}{a+1} = -\frac{a^2-1+1}{a+1} = 1 - a - \frac{1}{a+1}.$$

Jotta b olisi kokonaisluku, on välttämättä oltava $a + 1 = \pm 1$. Koska $a \neq 0$, vain $a = -2$ on mahdollinen. Siis välttämättä $b = 4$ ja $c = 16$.

2. Oletetaan, että Aina ostaa m seitsemän päivän lippua ja n 30 päivän lippua. Jotta liput riittäisivät, on oltava $7m+30n \geq 1096$. Lippujen hinta on $m \cdot 7{,}03 + n \cdot 30 = 0{,}03 \cdot m + 7m + 30n \geq 0{,}03m + 1096$. Tutkitaan, milloin $7m+30n = 1096$. Lukujen 7 ja 30 suurin yhteinen tekijä on 1. Diofantoksen yhtälön $7m+30n = 1$ ratkaisu saadaan Eukleideen algoritmista: koska $30 = 4 \cdot 7 + 2$ ja $7 = 3 \cdot 2 + 1$, niin $1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 3 \cdot (30 - 4 \cdot 7) = 13 \cdot 7 - 3 \cdot 30$. Siis $13 \cdot 1096 \cdot 7 - 3 \cdot 1096 \cdot 30 = 1096$ ja $(13 \cdot 1096 - 30t) \cdot 7 - (3 \cdot 1096 - 7t) \cdot 30 = 1096$ kaikilla t. Pienin m saadaan, kun t on suurin sellainen kokonaisluku, jolle $13 \cdot 1096 - 30t \geq 0$ ja $-(3 \cdot 1096 - 7t) \geq 0$. Suurin t, jolle $13 \cdot 1096 \geq 30t$ on 474; silloin $m = 28$. Helposti nähdään, että $3 \cdot 1096 - 7 \cdot 474 = -30 < 0$. Jos ostetaan 28 viikkolippua ja 30 kuukausilippua, hinnaksi tulee $1096 + 28 \cdot 0{,}03 = 1096{,}84$. Kaikilla muilla m:n ja n:n valinnoilla $0{,}03m + 7m + 30n \geq 0{,}03m + 1097 \geq 1097$. 28 viikkolippua ja 30 kuukausilippua on edullisin vaihtoehto.

3. Koska AB on yksikköympyrän halkaisija, $AB = 2$. Laskennon mukavoittamiseksi tarkastellaan ympyrää, jonka halkaisija $A'B' = 15$ (Merkitään pilkuilla alkuperäistä tehtävänantoa vastaavia pisteitä tässä "suurennoksessa"). Koska $A'B'$ on ympyrän halkaisija, $\angle A'C'B' = 90°$. Suorakulmaisen kolmion $A'B'C'$ kateettien suhde on $3 : 4$. Kolmio on siis tuttu $(3 : 4 : 5)$-suorakulmainen kolmio, ja $A'C' = 9$, $B'C' = 12$. Kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Jos $B'D'$ leikkaa $A'C'$:n pisteessä E', niin $A'E' = 5$ ja $E'C' = 4$. Kolmio $E'B'C'$ on suorakulmainen, joten Pythagoraan lauseen perusteella $B'E'^2 = 12^2 + 4^2 = 160$ ja $B'E' = 4\sqrt{10}$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle D'A'C' = \angle D'B'C'$. Kolmiot $A'E'D'$ ja $B'E'C'$ ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis



$$\frac{A'D'}{A'E'} = \frac{B'C'}{B'E'}$$

eli

$$A'D' = 5 \cdot \frac{12}{4\sqrt{10}} = \frac{15}{\sqrt{10}}.$$

Kun palataan ympyrään, jonka halkaisija on 2, $A'D'$ on kerrottava luvulla $\frac{2}{15}$; tehtävän vastaus on siis $AD = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

4. Erikoisessa joukossa ei saa olla kahta peräkkäistä alkiota joukoista $E_1 = \{1, 3, 9, 27\}$, $E_2 = \{2, 6, 18\}$, $E_3 = \{4, 12, 36\}$, $E_4 = \{5, 15, 45\}$, $E_5 = \{7, 21\}$, $E_6 = \{8, 24\}$, $E_7 = \{10, 30\}$, $E_8 = \{11, 33\}$, $E_9 = \{13, 39\}$, $E_{10} = \{14, 42\}$, $E_{11} = \{16, 48\}$, $E_{12} = \{17\}$, $E_{13} = \{19\}$, $E_{14} = \{20\}$, $\ldots$, $E_{34} = \{50\}$ (välissä ovat kaikki joukot $\{k\}$, missä $22 \le k \le 49$ ja k ei ole kolmen monikerta). Nyt supererikoiseen joukkoon on otettava kaksi alkiota joukoista $E_1, \ldots E_4$ ja yksi alkio jokaisesta joukosta $E_5, \ldots, E_{34}$. Supererikoisessa joukossa on siis $8+30 = 38$ alkiota. Joukosta E_1 voi valita alkiot supererikoiseen joukkoon kolmella tavalla, joukoista E_2, E_3, E_4 yhdellä tavalla, mutta joukoista $E_5, \ldots, E_{11}$ voi valinnan tehdä kahdella eri tavalla. Eri tapoja valita supererikoinen joukko on siis $3 \cdot 2^7 = 384$.

5. Tehtävän ehdot toteuttaville luvuille pätee

$$2^m p^2 = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1).$$

Koska oikean puolen jälkimmäinen tekijä on pariton ja > 1, on oltava $q - 1 = 2^m$ tai $q - 1 = 2^m p$. Jos olisi $q - 1 = 2^m p$, olisi $2^m p^2 + 1 = (2^m p + 1)^5 > 2^{5m} p^5$, mikä selvästi on mahdotonta. Siis $q = 2^m + 1$. Mutta nyt $2^m p^2 + 1 = (2^m + 1)^5 = 2^{5m} + 5 \cdot 2^{4m} + 10 \cdot 2^{3m} + 10 \cdot 2^{2m} + 5 \cdot 2^m + 1$ eli

$$p^2 = 2^{4m} + 5 \cdot 2^{3m} + 10 \cdot 2^{2m} + 10 \cdot 2^m + 5.$$

Jos $m \ge 2$, saadaan $p^2 = 8k + 5$. Mutta neliöluvut antavat 8:lla jaettuna jakojäännökseksi joko 0:n, 1:n tai 4:n. Siis $m < 2$ eli $m = 1$. Silloin $q = 3$ ja $2p^2 = 3^5 - 1 = 242$. Siis $p^2 = 121$ ja $p = 11$.